9. FUNCIONES CONTINUAS. HOMEOMORFISMOS

49. Demuestra que la función identidad: $i(x) = x$, es continua de $(X, \mathcal{T})$ en $(X, \mathcal{T}^*)$ si y sólo si la topología $\mathcal{T}$ es más fina que $\mathcal{T}^*$.

50. Sea X un espacio topológico. Demuestra que la función diagonal $d\colon X \to X \times X$ dada por $d(x) = (x, x)$ es continua para la topología producto de $X \times X$.

51. Sean X e Y espacios topológicos.

i) Demuestra que se cumple el siguiente resultado: Si $f : X \longrightarrow Y$ es continua e Y es un espacio de Hausdorff, entonces el conjunto $K = \{(x_1, x_2) : f(x_1) = f(x_2)\}$ es cerrado en el espacio producto $X \times X$.

ii) Demuestra que, con las mismas hipótesis del punto anterior, el conjunto

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in X \times Y : \ y = f(x)\},$$

es decir, la «gráfica» de la aplicación f, es un conjunto cerrado de $X \times Y$ con la topología producto.

52. Con la notación del ejercicio anterior:

i) Demuestra que el recíproco de la proposición del primer punto del ejercicio anterior no es cierto en general. Es decir, que K puede ser cerrado sin que Y sea Hausdorff.

ii) Demuestra que, sin embargo, si $f : X \longrightarrow Y$ es una función abierta y suprayectiva, y el conjunto

$$K = \{(x_1, x_2) \in X \times X : f(x_1) = f(x_2)\}$$

es cerrado en el espacio producto $X \times X$, entonces Y es Hausdorff.

53. Sea $X = [0, 1]$ con la topología usual e $Y = [0, 1] \times [0, 1]$ con la topología del orden lexicográfico. Estudia si las siguientes funciones son continuas.

i) $f\colon X \to Y$ dada por $f(t) = (t, t)$

ii) $g\colon X \to Y$ dada por $g(t) = (1/2, (2t + 1)/4)$

iii) $h\colon X \to Y$ dada por $h(t) = (t, 1)$.

54. Sea $a \in \mathbb{R}$. Demuestra que cada uno de los intervalos $(-\infty, a)$ y $(a, +\infty)$ en la recta, dotados de la topología relativa, es homeomorfo a $\mathbb{R}$, mostrando los homeomorofismos pertinentes.

55. Demuestra que el disco unidad $\mathbb{D} = \{(x, y) : \ x^2 + y^2 < 1\}$ (dotado de la topología relativa del plano) es homeomorfo al plano $\mathbb{R}^2$, exhibiendo un homeomorfismo explícito.
Indicación: Conviene usar las coordenadas polares.

56. Estudia si $\mathbb{R}$ con la topología $\mathcal{T}_{[\,)}$ es homeomorfo a $\mathbb{R}$ con la topología $\mathcal{T}_{(\,]}$. ¿Es la identidad entre ambos espacios un homeomorfismo?

57. Demuestra que los espacios $X = [0, 2) \cup [4, 5]$ e $Y = [0, 3]$, ambos con la topología del orden, son homeomorfos.

58. Sea $\mathsf{A} = (-\infty, 0] \cup (2, +\infty)$ y $f : \mathsf{A} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x - 2 & \text{si} \quad x > 2. \end{cases}$$

Demuestra que f es continua si A tiene la topología del orden o la de subespacio, pero que es un homeomorfismo sólo con la primera de ellas.

59. Da un ejemplo de una función continua $f : X \to Y$ cuyo grafo $\{(x, f(x)) : x \in X\}$ no sea cerrado en $X \times Y$ y de una función no continua cuyo grafo sí lo sea.
Indicación: Piensa en la identidad de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, poniendo topologías adecuadas en el espacio de salida y en el de llegada.

60. Prueba que existen funciones de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[\,)})$ en $\mathbb{N}$ con la topología discreta que son sobreyectivas y continuas, pero que no existen funciones de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[\,)})$ en $\mathbb{R}$ con la topología discreta que tengan tales propiedades.
Indicación: La imagen inversa de $\mathbb{R}$ sería una unión no numerable de abiertos disjuntos y $[a, b)$ contiene siempre un número racional.

10. Topología producto

61. Sea $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ una colección de espacios topológicos.

i) Demuestra que, en general, el producto cualquiera de abiertos no es abierto en la topología producto.

ii) Demuestra que el producto cualquiera de cerrados es un cerrado en la topología producto.

iii) Demuestra que, en la topología producto, $\Pi_{\alpha\in A}\overline{E_\alpha} = \overline{\Pi_{\alpha\in A}E_\alpha}$.

62. Demuestra que una sucesión converge en la topología producto si y sólo si converge en cada una de sus componentes.

63. Para para cada $n \in \mathbb{N} = \mathbb{Z}^+$, sea $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un homeomorfismo (con la topología usual de $\mathbb{R}$). Se define $f : \mathbb{R}^\mathbb{N} \to \mathbb{R}^\mathbb{N}$ por medio de $(x_n) \mapsto (f_n(x_n))$. Demuestra que f es un homeomorfismo respecto de las topologías producto usuales de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$.

64. Sea $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) \,|\, \alpha \in A\}$ una familia de espacios topológicos. Para cada α, sea $\varnothing \neq Y_\alpha \subset X_\alpha$. Demuestra que la topología relativa de la topología producto de $\Pi_\alpha X_\alpha$ coincide con la topología producto en $\Pi_\alpha Y_\alpha$ de las topologías relativas.

65. Sea $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) \,|\, \alpha \in A\}$ una familia de espacios topológicos. Sea $A = A_1 \cup A_2$ una partición de A. Demuestra que los espacios topológicos

$$\prod_{\alpha\in A} X_\alpha \qquad \text{y} \qquad \Big(\prod_{\alpha\in A_1} X_\alpha\Big) \times \Big(\prod_{\alpha\in A_2} X_\alpha\Big)\,,$$

dotados en cada uno de los casos con las topologías producto correspondientes, son homeomorfos.

66. Demuestra que el producto de espacios topológicos es Hausdorff es Hausdorff. ¿Es cierto es recíproco?

11. Aplicaciones abiertas y cerradas. Topología cociente

67. Sea $\pi_1 : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la proyección sobre el primer factor.

i) Sea X el subespacio $(\{0\}\times\mathbb{R}) \cup (\mathbb{R}\times\{0\})$ de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Sea g la restricción de π_1 a X. Demuestra que g es una aplicación cerrada pero que no es una aplicación abierta.

ii) Sea Y el subespacio $(\overline{\mathbb{R}_+}\times\mathbb{R}) \cup (\mathbb{R}\times\{0\})$ de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Sea h la restricción de π_1 a Y. Demuestra que la aplicación h no es ni abierta ni cerrada, pero sí es una aplicación cociente.

Indicación: $h^{-1}(U) \cap (\mathbb{R}\times\{0\}) = U \times \{0\}$.

68. Sea $p : X \to Y$ una aplicación y sea A un subespacio de X.

i) Demuestra que si A es abierto en X y p es una aplicación abierta, entonces la restricción de p a A es una aplicación abierta

ii) Concluye del apartado anterior que $p' : A \to p(A)$ definida por $p'(x) := p(x)$ es una aplicación abierta.

iii) Demuestra que si A y p son cerrados, la restricción de p a A es cerrada, luego la aplicación p' del apartado anterior también lo es.

69. Sea $X = \mathbb{R}^2$ con la topología usual.

i) Se define la relación de equivalencia sobre X:

$$(x_0, y_0) \sim (x_1, y_1) \quad \text{si y solamente si} \quad x_0 + y_0^2 = x_1 + y_1^2.$$

Identifica el espacio topológico cociente $X/_\sim$ con alguno conocido.

ii) Repite el apartado anterior para la relación de equivalencia

$$(x_0, y_0) \sim (x_1, y_1) \quad \text{si y solamente si} \quad x_0^2 + y_0^2 = x_1^2 + y_1^2\,.$$

70. Sea Z el subespacio $(\mathbb{R}\times\{0\}) \cup (\{0\}\times\mathbb{R})$ de $\mathbb{R}^2$. Sea $g : \mathbb{R}^2 \to Z$ la aplicación dada por

$$g(x, y) = (x, 0) \quad \text{si} \quad x \neq 0\,; \qquad g(0, y) = (0, y).$$

i) Estudia si la aplicación g es continua, si es abierta y si es cerrada.

ii) Demuestra que la topología cociente inducida en Z por g no es Hausdorff.