RESPUESTAS

Cincuenta Aniversario 1968 2018 UAM Universidad Autónoma de Madrid

Asignatura .... **Topología** .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día .... **23 de enero de 2018** ....

La puntuación máxima del examen es de 12 puntos. La calificación del examen será el mínimo entre 10 y el número de puntos obtenido.

1.

(a) (1 punto) Sea X un espacio topológico y $A, B \subset X$. Demuestra que si $\overline{A} \cup B = X$ entonces $\overline{A} \cup \mathring{B} = X$.

Si $x \notin \mathring{B}$ entonces $\forall V_x$, $V_x \cap B^c \neq \phi$ pero $B^c \subset \overline{A}$ $\therefore$ $V_x \cap \overline{A} \neq \phi$
i.e. $x \in \overline{A}$

(b) (1 punto) Sea X un espacio métrico y $A \subset X$. Para todo $x \in X$, se define $d(x, A) = \inf\{d(x, y) | \ y \in A\}$. Demuestra que $x \in \overline{A} \Leftrightarrow d(x, A) = 0$.

$x \in \overline{A} \Rightarrow \forall r > 0$ $B(x, r) \cap A \neq \phi$ i.e. $\forall r > 0$ $\exists y_r \in A : d(x, y_r) < r$
$\therefore$ $\inf\{d(x, y) : y \in A\} = 0$.

$d(x, A) = 0 \Rightarrow \forall r > 0 \exists y_r \in A : d(x, y_r) < r$ $\therefore$ $\forall r$
$B(x, r) \cap A \neq \phi$ $\therefore$ $x \in \overline{A}$.

(c) (1 punto) Demuestra que la intersección de dos subconjuntos densos y abiertos en un espacio topológico también es un subconjunto denso.

A, B abiertos densos de X
$\forall U$ abierto de X $U \cap (A \cap B) = (U \cap A) \cap B$
$U \cap A$ abierto no vacío. $\therefore$ $(U \cap A) \cap B \neq \phi$. ✓

2. Decide razonadamente (bien dando una demostración, bien dando un contraejemplo sencillo) si es cierta o falsa cada una de las afirmaciones siguientes:

(a) (1 punto) Si $\overline{A} \cup B = X$ entonces $A \cup \overline{B} = X$. En $\mathbb{R}$:

$A = \mathbb{Q}$, $B = \phi$ | $\overline{A} \cup B = \mathbb{R}$

$\overline{A} = \mathbb{R}$, $\overline{B} = \phi$ | $A \cup \overline{B} = \mathbb{Q}$ FALSO

(b) (1 punto) Si $f : X \to \mathbb{S}^1$ es continua y suprayectiva entonces X es compacto.

FALSO $X = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$

$$f : X \longrightarrow \mathbb{S}^1$$
$$(t, \omega) \longmapsto \omega$$

(c) (1 punto) El espacio topológico $\mathbb{R}$ con la topología conumerable (un subconjunto propio es abierto si su complementario es numerable o finito) es Lindelöf.

CIERTO Si $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es un recubrimiento por abiertos no vacíos de $\mathbb{R}$ entonces se toma uno cualquiera G_{α_0} que recubre $\mathbb{R}$ excepto ~~[illegible]~~ subconjunto numerable ~~[illegible]~~ N. Para cada $n \in N$ se toma un α_n: $n \in G_{\alpha_n}$. La familia $\{G_{\alpha_0}\} \cup \{G_{\alpha_n}\}_{n \in N}$ es un recubrimiento numerable de $\mathbb{R}$.

3. Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1], y \in [0, 1]\}$. Halla (no es necesario justificar la respuesta) $\overline{A}$, $\mathring{A}$, $\overline{\mathring{A}}$, y $\mathring{\overline{A}}$,

(a) (1 punto) con la topología usual de $\mathbb{R}^2$;

$\overline{A} = [0,1]\times[0,1]$ | $\mathring{\overline{A}} = (0,1)\times(0,1)$

$\mathring{A} = \emptyset$ | $\overline{\mathring{A}} = \emptyset$

(b)(1 punto) con la topología del orden lexicográfico de $\mathbb{R}^2$;

$\overline{A} = A$ (A es cerrado)

$\mathring{A} = (\mathbb{Q}\cap[0,1])\times(0,1)$

$\mathring{\overline{A}} = \mathring{A}$

$\overline{\mathring{A}} = A$

4.
(a) (1 punto) Demuestra que la imagen por una aplicación abierta e inyectiva de un espacio topológico de Hausdorff es otro espacio de Hausdorff.

$f: X \to Y$ $y_1, y_2 \in f(X)$ $y_1 \neq y_2$. $\exists!\, x_1, x_2 \in X$

$x_1 \neq x_2$ $f(x_1) = y_1$ $f(x_2) = y_2$ $\exists\, U_{x_1}\ U_{x_2} : U_{x_1} \cap U_{x_2} = \emptyset$

$V_1 = f(U_{x_1})$, $V_2 = f(U_{x_2})$ abiertos, $y_1 \in V_1$, $y_2 \in V_2$

$V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

(b) (1 punto) Consideremos el espacio $\mathbb{R}^2$ con la topología usual y la aplicación $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida como sigue:

$$f(x,y) = (x,y) \quad \text{si } x < 0\,, \qquad f(x,y) = (x,0) \quad \text{si } x \geq 0\,.$$

Decide razonadamente si f es una aplicación abierta y si es continua.

$f(B((2,2),1)) = (1,3) \times \{0\}$ no es abierto.

$A = f^{-1}(B((0,0),1)) = \{0 \leq x < 1\} \cup [B((0,0),1) \cap \{x<0\}]$ que no es abierto pues, p. ej. $(0,5) \in A$ pero no es interior

5. Se consideran los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ (dotado de la topología usual): la circunferencia unidad $A = \mathbb{S}^1 \times \{0\}$ y el cilindro finito $B = \mathbb{S}^1 \times [0,1]$.

(a) (1 punto) ¿Son A y B homeomorfos? Razona la respuesta.

No son homeomorfos: si $f: A \to B$ fuese un homeomorfismo, la restricción $f|_{A \setminus \{(-1,0),(1,0)\}} : A \setminus \{(-1,0),(1,0)\} \longrightarrow B \setminus \{f(-1,0), f(1,0)\}$ también lo sería. Pero $B \setminus \{f(-1,0), f(1,0)\}$ es conexo y $A - \{(-1,0),(1,0)\}$ no lo es

(b) (1 punto) ¿Son isomorfos sus grupos fundamentales? Determínalos razonadamente.

Ambos son conexos por caminos

$\pi_1(A) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1) \times \pi_1(\{0\}) \cong \mathbb{Z} \times \{e\} \cong \mathbb{Z}$

$\pi_1(B) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1) \times \pi_1([0,1]) \cong \mathbb{Z} \times \{e\} \cong \mathbb{Z}$