Cincuenta Aniversario 1968 2018 UAM Universidad Autónoma de Madrid

Asignatura **Topología** Grupo

Apellidos Nombre

Ejercicio del día **14 de diciembre de 2017**

La puntuación máxima del examen es de 12 puntos. La calificación del examen será el mínimo entre 10 y el número de puntos obtenido.

1. (3 puntos) Se consideran los espacios topológicos $X = \mathbb{R}$ con la topología usual e $Y = \mathbb{R}$ con la topología cofinita. Para cada uno de los siguientes conjuntos de $X \times Y$:

$$\mathsf{A} = \mathbb{R} \times \{3\}, \qquad \mathsf{B} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$$

halla, en la topología producto, su interior y su cierre (no es necesario justificar la respuesta).

RESPUESTA:

A no tiene puntos interiores, por tanto $\mathring{\mathsf{A}} = \emptyset$.
A^c es abierto, por tanto $\overline{A} = A$.

B no tiene puntos interiores, por tanto $\mathring{\mathsf{B}} = \emptyset$.
B^c no tiene puntos interiores, por tanto $\overline{B} = \mathbb{R}^2$.

2. (3 puntos) Sea el espacio $X = \mathbb{R}$ con la topología $\mathcal{T}_{[\,)}$ de Sorgenfrey (o del límite inferior) y en él el conjunto $\mathsf{A} = [0, 1]$.

a. Decide razonadamente si A es compacto. **b.** Decide razonadamente si A es conexo.

RESPUESTA:

A no es compacto: el recubrimiento abierto $\{[0\,,\,1 - \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{Z}^+\} \cup \{[1\,,\,2)\}$ no tiene subrecubrimiento finito.

A no es conexo: $\mathsf{A} \subset [0\,,\,1) \cup [1\,,\,2)$; $[0\,,\,1)$ y $[1\,,\,2)$ son abiertos de Sorgenfrey disjuntos.

3. (3 puntos) Decide razonadamente si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ (con la topología usual) son o no homeomorfos:

$$\mathsf{A} = \{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x + y \geq 0\}\,, \qquad \mathsf{B} = \{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 - y^2 = 0\}\,.$$

RESPUESTA:

No son homeomorfos.
Si $f : \mathsf{B} \to \mathsf{A}$ fuese un homeomorfismo entre ellos, $f : \mathsf{B} \setminus \{(0\,,0)\} \to \mathsf{A} \setminus \{f(0\,,0)\}$ también lo sería.
Pero $\mathsf{B} \setminus \{(0\,,0)\}$ no es conexo y $\mathsf{A} \setminus \{f(0\,,0)\}$ sí lo es.

4. (3 puntos) Sean X un espacio topológico compacto, Y un espacio de Hausdorff y $f :\ X \to Y$ una aplicación continua.

a. Demuestra que f es cerrada.

b. Demuestra que si f es inyectiva entonces f es abierta si y solamente si $f(X)$ es un abierto de Y.

RESPUESTA:
a. F cerrado $\overset{X\text{compacto}}{\Longrightarrow}$ F compacto $\overset{f\text{continua}}{\Longrightarrow}$ $f(X)$ compacto de Y $\overset{Y\text{ es T}_2}{\Longrightarrow}$ $f(X)$ cerrado.

b.
1. ($\Rightarrow$): f abierta $\Rightarrow f(X)$ abierto de Y.

2. ($\Leftarrow$): G abierto de $X \Rightarrow G^c$ cerrado $\Rightarrow f(G^c)$ cerrado de $Y \Rightarrow Y \setminus f(G^c)$ abierto de $Y \Rightarrow$

$\Rightarrow (Y \setminus f(G^c)) \cap f(X) = f(G)$ abierto de Y.