Variable Compleja I (CURSO 2022-23, Universidad Autónoma de Madrid)

Apuntes detallados, con ejemplos y ejercicios resueltos

Series de potencias

Definición. Sean $c \in \mathbb{C}$, $a_n \in \mathbb{C}$, $n \geq 0$. La suma infinita $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ se denomina serie de potencias (centrada en $z = c$). Los números a_n son los coeficientes de la serie.

Mencionamos algunos ejemplos.

- Cada polinomio de z de grado N es una serie de potencias, donde $a_n = 0$ para todo $n > N$. Por eso las series de potencias representan una generalización de los polinomios (y en estos apuntes veremos que en varios aspectos se comportan de manera similar).
- $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n} = z + z^2 + z^4 + z^8 + z^{16} + \dots$ es una serie de potencias centrada en el origen ($c = 0$), con $a_k = 1$ para $k = 2^n$ y $a_k = 0$ cuando $k \neq 2^n$.
- Por supuesto, la suma puede empezar desde otro valor de n, distinto de cero (considerando los coeficientes iniciales $a_k = 0$), por ejemplo,

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(n-1)(n-2)}(z+2i)^n.$$

  En este caso, $c = -2i$ mientras que $a_0 = a_1 = a_2 = 0$.
- Es importante observar que $\sum_{n=-1}^{\infty}(z-1)^n = \frac{1}{z-1} + 1 + (z-1) + (z-1)^2 + \dots$ no es una serie de potencias centrada en $c = 1$, debido a la presencia del término $(z-1)^{-1}$. (Advertencia: eso no significa que la suma no pueda escribirse como una serie de potencias centrada en otro punto, pero eso ya es un asunto diferente que trataremos en otro capítulo.)

Para una serie de potencias, se plantean varias preguntas naturales: para qué valores de z converge, en qué sentido converge, si representa una función continua o diferenciable en el dominio de convergencia, etc. Como veremos más adelante, las series de potencias serán nuestro ejemplo principal de funciones holomorfas en discos abiertos. Aunque parezca muy sorprendente, el recíproco también es cierto: veremos que, de hecho, toda función holomorfa es localmente (en cierto disco) igual a una serie de potencias.

Convergencia de series de potencias

Es obvio que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ converge (absolutamente) para $z = c$, siendo la suma a_0. ¿Converge para algún otro valor de z? Nuestra primera tarea es determinar esos valores, si los hubiera. La respuesta viene dada por el siguiente teorema fundamental que debemos al matemático noruego Niels H. Abel (1802–1829).

Teorema. (*Abel*) Dada la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$, existe un único valor $R \in [0,+\infty]$ tal que la serie:

- converge absolutamente cuando $|z-c| < R$;

- converge uniformemente en cada disco cerrado $\overline{D}(c;r) = \{z : |z-c| \le r\}$, donde $r < R$ (equivalentemente, converge uniformemente en cada subconjunto compacto $K \Subset D(c;R)$);

- diverge cuando $|z-c| > R$.

Cuando cuando $R = +\infty$, hay que interpretar esta afirmación entendiendo que la serie converge absolutamente para todo z y uniformemente en cada disco cerrado de radio finito. En el caso $R = 0$, entendemos que sólo converge (y absolutamente) cuando $z = c$.

El valor de R viene dado por la *fórmula de Cauchy-Hadamard*:

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}} = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{|a_n|^{1/n}},$$

entendiendo que $1/+\infty = 0$ y $1/0^+ = +\infty$. (Por supuesto, con frecuencia usaremos también la notación alternativa $\overline{\lim}$ para denotar al $\limsup$.)

Definición. El disco $D(c;R) = \{z \in \mathbb{C} : |z-c| < R\}$ se denomina disco de convergencia de la serie de potencias y el valor R (finito o infinito) radio de convergencia. (Obviamente, es un verdadero disco sólo cuando $0 < R < +\infty$; cuando $R = 0$, la región de convergencia es sólo el punto c y, cuando $R = +\infty$, se trata de todo el plano.)

DEMOSTRACIÓN. $\square$ Existen diferentes pruebas. Presentamos una de ellas. Hay que discutir dos casos diferentes: $R = 0$ y $R > 0$.

(1) Primero, consideremos el caso cuando $R = 0$. No existen puntos tales que $|z-c| < 0 = R$, así que sólo hay que demostrar que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ diverge para todo z con $|z-c| > 0$, es decir, para todo $z \ne c$. Sea z arbitrario con $z \ne c$. Puesto que, por hipótesis, $0 = R = 1/(\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n})$, es decir, $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = +\infty$, se sigue que existen infinitos índices $k \in \mathbb{N}$ tales que $|a_k|^{1/k} > \frac{1}{|z-c|}$. Entonces para cada uno de esos valores de k tenemos que $|a_k(z-c)|^k| > \frac{1}{|z-c|^k} \cdot |z-c|^k = 1$. Por tanto, el término general, $a_n(z-c)^n$ de nuestra serie no puede tender a cero cuando $n \to \infty$, así que la serie diverge.

(2) Consideremos ahora el caso $0 < R \le +\infty$. Para r arbitrario tal que $0 < r < R$, veamos que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ converge absoluta y uniformemente en el disco cerrado $\overline{D}(c;r) = \{z : |z-c| \le r\}$, para $0 < r < R$. En primer lugar, existe ρ tal que $r < \rho < R$. Puesto que, por hipótesis, $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 1/R < 1/\rho$, por la definición del límite superior, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n|^{1/n} < 1/\rho$ para todo $n \ge N$. Entonces

$$|a_n(z-c)^n| = |a_n||z-c|^n < \left(\frac{r}{\rho}\right)^n, \qquad \text{para todo } n \ge N.$$

Puesto que $0 < r/\rho < 1$, la serie geométrica $\sum_n \left(\frac{r}{\rho}\right)^n$ converge. Por el criterio de Weierstrass, la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_0-c)^n$ converge absoluta y uniformemente en $\overline{D}(c;r) = \{z : |z-c| \le r\}$. Puesto que esto se cumple para todo r con $0 < r < R$, se sigue que la serie de potencias converge absolutamente en todo el disco abierto $D(c;R)$.

Finalmente, comprobaremos que la serie diverge cuando $0 \le R < +\infty$ y $|z-c| > R$. Sea z un número arbitrario con esta propiedad y elijamos un valor r tal que $|z-c| > r > R$. Entonces $1/r < 1/R$ y, por la definición del límite superior, existe un conjunto infinito de índices $k \in \mathbb{N}$ tales que $|a_k|^{1/k} > 1/r$. Para cada uno de esos valores de k obtenemos que

$$|a_k(z-c)^k| > \left(\frac{|z-c|}{r}\right)^k \to \infty, \qquad k \to \infty,$$

lo cual significa que el término general de nuestra serie de potencias no tiende a cero cuando $n \to \infty$. Por tanto, la serie diverge. ■

Observaciones.

1. El teorema de Abel nos da una nueva perspectiva -más general- de las series de potencias reales, vistas en Cálculo I: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$, con c, $a_n \in \mathbb{R}$. Esas series son, obviamente, un caso especial de las series de potencias complejas. Para $z \in \mathbb{C}$, convergen típicamente en un disco $D(c;R)$ pero, para $x \in \mathbb{R}$, convergen en un intervalo abierto $(c-R, c+R)$ de la recta real. Hay que darse cuenta de que $(c-R, c+R) = D(c;R) \cap \mathbb{R}$. Por tanto, el teorema aquí visto es una generalización del resultado visto en Cálculo I.

2. El teorema de Abel no indica nada acerca de la convergencia o divergencia en la circunferencia $|z-c| = R$ de centro c y radio R, ya que caben todas las posibilidades: convergencia en toda la circunferencia, divergencia en cada punto de la circunferencia, convergencia en algunos puntos de la circunferencia y divergencia en el resto. En particular, si sabemos que la serie converge en un punto de la circunfernecia, no podemos deducir que converja en ningún otro punto de la circunferencia. De momento, no tenemos muchas herramientas técnicas para estudiar este fenómeno (algunas se verán en Variable Compleja II y otros requieren conocimientos más avanzados), pero en estos apuntes veremos un par de ejemplos simples para ilustrar algunas de las posibles diferentes situaciones.

Cálculo del radio de series de potencias

Veremos a continuación ejemplos de cálculo del radio de convergencia para distintas series de potencias.

Ejercicio 1. *Determine el radio de convergencia de la serie funcional* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

SOLUCIÓN. Se trata de la serie de potencias centrada en el origen ($c = 0$) y con los coeficientes $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$. Calcularemos su radio de convergencia usando la fórmula de Cauchy-Hadamard.
Recordando el límite básico $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, conocido del curso de Cálculo, vemos que

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n}\right)^\alpha} = \frac{1}{1^\alpha} = 1\,.$$

Por tanto, se sigue que el radio de convergencia es siempre $R = 1$, independiente del valor del parámetro real α. ■

En particular, el ejemplo anterior nos muestra que tanto la serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ como las series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$ todas tienen radio de convergencia uno. Para la serie geométrica, eso ya lo habíamos averiguado en la anterior entrega de apuntes, aplicando métodos directos.

El siguiente ejercicio nos muestra cómo tratar un caso de serie de potencias con muchos coeficientes nulos.

Ejercicio 2. *Calcule el radio de convergencia de la serie de potencias* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^{n!}$.

SOLUCIÓN. Observemos primero que el coeficiente a_k de la serie es no nulo si y sólo si $k = n!$. Por lo tanto,

$$a_k = \begin{cases} 1, & \text{si } k = n! \\ 0, & \text{si } k \neq n! \end{cases}$$

Dado que todos los términos de la sucesión $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ son 0 ó 1, ninguna subsucesión de dicha sucesión puede converger a un valor mayor que 1, luego $\limsup_{k\to\infty} |a_k|^{1/k} \leq 1$. Puesto que la subsucesión $(a_{n!})_{n=1}^{\infty}$ converge a 1, se sigue que

$$\limsup_{k\to\infty} |a_k|^{1/k} = 1\,.$$

Finalmente, aplicando la fórmula de Cauchy-Hadamard, obtenemos $R = 1$. ■

Ejercicio 3. *Calcule el radio de convergencia de la serie de potencias* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-2i)^n z^{n^3}$.

SOLUCIÓN. Observemos primero que el coeficiente a_k de la serie es no nulo si y sólo si $k = n^3$ y que en este caso $n = k^{1/3}$. Así obtenemos la siguiente fórmula para el coeficiente k-ésimo y su módulo:

$$a_k = \begin{cases} (-2i)^{k^{1/3}}, & \text{si } k = n^3, \\ 0, & \text{si } k \neq n^3. \end{cases} \qquad |a_k| = \begin{cases} 2^{k^{1/3}}, & \text{si } k = n^3, \\ 0, & \text{si } k \neq n^3. \end{cases}$$

Luego

$$\limsup_{k\to\infty} |a_k|^{1/k} = \lim_{k\to\infty} 2^{(k^{1/3}/k)} = \lim_{k\to\infty} 2^{k^{-2/3}} = 2^0 = 1\,.$$

Finalmente, aplicando la fórmula de Cauchy-Hadamard, obtenemos $R = 1$. ■

Observación. La fórmula para el radio no permite una aplicación inmediata para las series de potencias cuyos coeficientes contienen factoriales; en esos casos, hay que trabajar más si se quiere usar la fórmula de Cauchy-Hadamard. Aquí es muy relevante la *fórmula de Stirling*:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n, \qquad n \to \infty,$$

conocida de los cursos de Cálculo y Probabilidad. Recordemos que, para las sucesiones x_n, $y_n > 0$, la notación $x_n \sim y_n$, $n \to \infty$ significa que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = 1$.

El siguiente resultado del cálculo es sencillo pero no siempre se ve en los cursos básicos. Por ello incluímos una demostración aquí.

Lema. Si $x_n \sim y_n$ cuando $n \to \infty$, entonces $\sqrt[n]{x_n} \sim \sqrt[n]{y_n}$, $n \to \infty$.

DEMOSTRACIÓN. □ Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Por hipótesis, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ tenemos $1-\varepsilon < \dfrac{x_n}{y_n} < 1+\varepsilon$, así que $\sqrt[n]{1-\varepsilon} < \sqrt[n]{\dfrac{x_n}{y_n}} < \sqrt[n]{1+\varepsilon}$. Dado que $1+\varepsilon > 1$, se sigue que $\sqrt[n]{1+\varepsilon} < 1+\varepsilon$. También de $1-\varepsilon < 1$ se sigue que $\sqrt[n]{1-\varepsilon} > 1-\varepsilon$. Por lo tanto,

$$1-\varepsilon < \frac{\sqrt[n]{x_n}}{\sqrt[n]{y_n}} < 1+\varepsilon$$

para todo $n \geq N$. Esto prueba la afirmación del Lema. ■

Veamos ahora un ejemplo muy importante donde podemos usar estas herramientas.

Ejercicio 4. *Calcule el radio de convergencia de la serie de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$.

SOLUCIÓN. De la fórmula de Stirling y del Lema anterior se desprende que

$$(n!)^{1/n} \sim \sqrt[2n]{2n}\,\sqrt[2n]{\pi}\,\frac{n}{e}, \qquad n \to \infty,$$

lo cual implica que el radio de convergencia de la serie es $+\infty$. Por tanto, la serie dada converge absolutamente en todo el plano complejo y uniformemente en cada disco cerrado, según el Teorema de Abel. Esta serie es muy importante en las Matemáticas y volveremos a hablar de ella en breve ya que, como es de esperar, nos dará otra fórmula para la función exponencial compleja. ■

Una fórmula alternativa para el radio de convergencia. Recordemos el siguiente hecho conocido del cálculo elemental: para toda sucesión $(c_n)_n$ de números positivos se cumple la desigualdad

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n}.$$

Por tanto, si existe $\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n}$, las cuatro cantidades coinciden y $\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n}$. Como consecuencia, en el caso cuando $a_n \neq 0$ para todo n (o para todo $n \geq N$) y cuando el límite del cociente existe, tenemos la siguiente fórmula alternativa (también llamada la fórmula del cociente) para el radio de convergencia.

Teorema. (*Fórmula de Hadamard*). Si $a_n \neq 0$ para todo $n \geq N$ y existe cualquiera de los límites que aparecen en la fórmula abajo (como límite finito o infinito), el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ es

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Ejercicio 5. *Calcule el radio de convergencia y la suma de las serie de potencias* $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)z^n$.

SOLUCIÓN. Calculamos fácilmente el radio de convergencia por la fórmula de Hadamard:

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = 1. \qquad \blacksquare$$

Observación. Es importante notar que esta fórmula no es aplicable a las series que tienen una cantidad infinita de coeficientes nulos, como la del Ejercicio 2. Sin embargo, es muy eficaz para las series cuyos coeficientes contienen factoriales u otros términos que permitan cancelaciones, como las del Ejercicio 1 o la de nuestro siguiente ejemplo.

Ejercicio 6. *Calcule el radio de convergencia de cada una de las series de potencias* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!z^n$.

SOLUCIÓN. En el primer caso, según la fórmula de Hadamard y después de la cancelación,

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = +\infty.$$

Por tanto, la serie dada converge absolutamente en todo el plano complejo y uniformemente en cada disco cerrado, según el Teorema de Abel. Esta serie es muy importante en las Matemáticas y volveremos a hablar de ella en breve.

En el segundo caso, gracias a cancelaciones similares, vemos fácilmente que $R = 0$. Por tanto, la serie de potencias $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!z^n$ no es de mucho interés, dado que sólo converge para $z = 0$. $\blacksquare$

Comportamiento de una serie de potencias en el borde del disco de convergencia

Como ya comentamos antes, el Teorema de Abel no nos proporciona ninguna información acerca de la convergencia en el borde del disco de convergencia, sólo dentro o fuera de él. La razón es que en los puntos de la frontera del disco (la circunferencia $\{z : |z-c| = R\}$ cualquier situación es posible.

En este curso no disponemos de suficientes herramientas para analizar muchas posibilidades de este comportamiento en la frontera, así que sólo daremos unos pocos ejemplos para ilustrar la variedad existente. Empezaremos con las dos posibilidades radicalmente distintas: divergencia en cada punto de la circunferencia y convergencia en cada punto de la misma.

Ejercicio 7. *Discuta la convergencia de la serie de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ *en el borde de su disco de convergencia.*

SOLUCIÓN. □ De nuevo, es una serie de potencias centrada en el origen ($c = 0$), con los coeficientes $a_n = 1$; de hecho, es la conocida serie geométrica que constituye el caso especial $\alpha = 0$ del Ejercicio 1. La fórmula de Cauchy-Hadamard en este caso implica también que $R = 1$. Por tanto, la serie converge absolutamente en el disco unidad $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ y diverge para $|z| > 1$. Además, converge uniformemente en cualquier disco cerrado $\{z : |z| \le r\}$ con $0 < r < 1$ y, por tanto, en cualquier $K \Subset \mathbb{D}$. En realidad, todos estos hechos ya son conocidos de la entrega anterior de apuntes sobre la convergencia de sucesiones y series funcionales, donde fueron probados directamente. En otras palabras, en este ejemplo no es estrictamente necesario aplicar fórmula de Cauchy-Hadamard; simplemente, su uso nos confirma la información que ya teníamos antes.

Veamos ahora la cuestión que nos interesa: la convergencia o no de nuestra serie geométrica en la circunferencia unidad $\{z : |z| = 1\}$. Recordemos también de la entrega anterior de apuntes que la serie geométrica diverge en todos los puntos de la circunferencia. En efecto, si $|z| = 1$, entonces o bien $z^n \to 1$ (si $z = 1$) o bien z^n diverge (en el caso contrario) por un ejercicio ya conocido. Por tanto, el término general de la serie, $z^n \not\to 0$ en la circunferencia cuando $n \to \infty$, luego la serie diverge allí.

Una observación final. Las sumas parciales de nuestra serie geométrica son

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} z^n = \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z} \to \frac{1}{1 - z}, \qquad N \to \infty.$$

Aunque la suma $\dfrac{1}{1-z}$ tiene sentido para todo $z \neq 1$, la serie geométrica sólo coincide con ella en $\mathbb{D}$, el disco unidad abierto, y no puede ser convergente en ningún punto de la circunferencia unidad.

Ejercicio 8. *Analice la convergencia de la serie funcional* $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n^2}$.

SOLUCIÓN. Se trata de una serie de potencias centrada en el origen ($c = 0$), con los coeficientes $a_n = \frac{1}{n^2}$.

La fórmula de Cauchy-Hadamard implica que $R = 1$ (usando el límite básico $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ conocido del curso de Cálculo). Por tanto, la serie de potencias dada converge absolutamente en el disco unidad $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ y diverge para $|z| > 1$.

De hecho, es fácil ver que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n^2}$ converge uniformemente en todo el disco unidad cerrado $\overline{\mathbb{D}} = \{z : |z| \le 1\}$ debido al Criterio de Weierstrass, ya que para $n \ge 1$ allí se tiene que $\left|\dfrac{z^n}{n^2}\right| \le \dfrac{1}{n^2}$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ converge.

Una última observación: las sumas parciales $S_N(z) = \sum_{n=1}^{N} \dfrac{z^n}{n^2}$ son funciones polinómicas y, por tanto, continuas en el disco unidad cerrado, $\overline{\mathbb{D}}$. Por tanto, la convergencia uniforme de la serie implica que la suma de la serie de potencias (sin entrar en el asunto de intentar calcularla) es una función continua en $\overline{\mathbb{D}} = \{z : |z| \le 1\}$. Más adelante, seremos capaces de calcular dicha suma de forma explícita. ■

Existen otros ejemplos, bastante más complicados donde el comportamiento en el borde del disco de convergencia varía de un punto a otro. Sin embargo, muchos de ellos requieren resultados teóricos adicionales que superan el nivel de este curso (o incluso el del curso optativo de Variable Compleja II) y, por tanto, no los podemos tratar aquí.

Para ver otro ejemplo relativamente elemental, necesitaremos primero recordar el siguiente resultado, conocido de los cursos de Cálculo.

Teorema. (*Criterio de Abel-Dirichlet*) Supongamos que la sucesión $(a_n)_{n=0}^\infty$ de números complejos y $(b_n)_{n=0}^\infty$ de números reales cumplen las siguientes condiciones:

(1) Las sumas parciales $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$ forman una sucesión acotada;

(2) $(b_n)_n$ es decreciente y $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Entonces la serie $\sum_{n=0}^\infty a_n b_n$ converge.

No es difícil dar una demostración de este resultado usando el Criterio de Cauchy pero la omitiremos aquí. Como caso especial del teorema, observando que la sucesión $A_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k$ es acotada (al tomar sólo dos valores posibles: 1 y 0), obtenemos el siguiente resultado conocido de los cursos de Cálculo.

Teorema. (*Criterio de Leibniz*) Supongamos que la sucesión $(b_n)_{n=0}^\infty$ de números reales es decreciente y que, además, satisface la condición $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Entonces la serie alternada $\sum_{n=0}^\infty (-1)^n b_n$ converge.

Ejercicio 9. *Supongamos que el radio de convergencia de la serie de potencias* $\sum_{n=0}^\infty b_n z^n$ *es* 1 *y que, además,* $(b_n)_{n=0}^\infty$ *es decreciente y* $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

(a) Demuestre que la serie $\sum_{n=0}^\infty b_n z^n$ *converge en cada punto* z *con* $|z| = 1$ *salvo, posiblemente, en* $z = 1$.

(b) Demuestre, dando un ejemplo concreto, que una serie de este tipo puede ser divergente en $z = 1$.

SOLUCIÓN. (a) Sea z fijo con $|z| = 1$, $z \neq 1$. Podemos aplicar el Criterio de Abel-Dirichlet eligiendo $a_n = z^n$, puesto que

$$|A_n| = \left|\sum_{k=0}^n a_k\right| = \left|\sum_{k=0}^n z^k\right| = \left|\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\right| \le \frac{1+|z^{n+1}|}{|1-z|} = \frac{2}{|1-z|}$$

y, por tanto, la sucesión (A_n) está acotada por un número fijo. Se sigue que $\sum_{n=0}^\infty b_n z^n$ converge para todo z con $|z| = 1$, $z \neq 1$.

(b) El ejemplo de la serie

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{n}, \quad \text{con } b_n = \frac{1}{n}$$

(siendo b_n decreciente y convergente a cero) muestra que una serie con las características exigidas puede ser divergente para $z = 1$, puesto que en ese punto se convierte en la conocida serie armónica, $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n}$. ■

Operaciones algebraicas con series de potencias

Veremos ahora que dos series de potencias, centradas en el mismo punto, se pueden sumar y multiplicar, interpretando la suma y el producto de manera adecuada. El caso de la suma es más inmediato.

Proposición. Si las series de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-c)^n$ tienen radios de convergencia R_a y R_b, respectivamente, entonces el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(z-c)^n$ es, por lo menos, $R = \min\{R_a, R_b\}$ y, además, se cumple

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(z-c)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-c)^n \tag{1}$$

para todo $z \in D(c;R)$.

Observación. El enunciado dice "por lo menos" porque es posible que el radio de la serie para la suma sea más grande.

Por ejemplo, cuando $R_a < +\infty$ y $b_n = -a_n$, tenemos $R_a = R_b$ (por la fórmula de Cauchy-Hadamard) pero la suma es la serie cuyos coeficientes son todos idénticamente nulos y, por tanto, converge en todo el plano.

DEMOSTRACIÓN. Sin pérdida de generalidad, podemos considerar sólo el caso cuando $R_a \le R_b$ (y, por tanto, $R = R_a$), siendo el otro caso completamente análogo. En este caso, ambas series convergen en $D(c;R)$ y las sumas parciales claramente cumplen la desigualdad

$$\sum_{n=0}^{N}|(a_n+b_n)(z-c)^n| \le \sum_{n=0}^{N}|a_n(z-c)^n| + \sum_{n=0}^{N}|b_n(z-c)^n| \le \sum_{n=0}^{\infty}|a_n(z-c)^n| + \sum_{n=0}^{\infty}|b_n(z-c)^n|,$$

para todo $N \in \mathbb{N}$ y todo $z \in D(c;R)$ (porque las series de potencias dadas convergen absolutamente en $D(c;R)$), lo cual demuestra que, para $z \in D(c;R)$ fijo, converge la serie de términos positivos $\sum_{n=0}^{\infty}|(a_n+b_n)(z-c)^n|$. Por definición, eso significa que la serie compleja $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(z-c)^n$ converge absolutamente en $D(c;R)$.

Una vez establecida la convergencia de la serie correspondiente a la suma, tomando el límite cuando $N \to \infty$ en la igualdad obvia:

$$\sum_{n=0}^{N}(a_n+b_n)(z-c)^n = \sum_{n=0}^{N} a_n(z-c)^n + \sum_{n=0}^{N} b_n(z-c)^n,$$

se sigue la conclusión (1). ■

Ejercicio 10. *Determine el disco de convergencia de cada una de las series de potencias*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n$$

y calcule la suma de estas series, determinando su radio de convergencia.

SOLUCIÓN. La segunda serie es, en efecto, una serie de potencias porque

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n\,,$$

así que $a_n = (-1)^n$. Por la proposición anterior, la suma de nuestras series es

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n + \sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(1+(-1)^n)z^n = \sum_{k=0}^{\infty} 2z^{2k} = 2(1+z^2+z^4+z^6+\dots)\,,$$

ya que $1+(-1)^n = 0$ para n impar y $1+(-1)^n = 2$ cuando n es par: $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$.
El radio de convergencia de esta nueva serie es, por lo menos, uno (por la proposición anterior) y es fácil establecer que es exactamente uno por la fórmula de Cauchy-Hadamard, con una cuenta muy parecida a la del Ejercicio 2.
Alternativamente, basta observar que la serie obtenida es una geométrica con razón z^2 y, por tanto, converge sólo cuando $|z|^2 < 1$, esto es, en el disco unidad. Además, usando la fórmula para la suma de una serie geométrica, es fácil ver que la suma de la serie obtenida arriba es $\frac{2}{1-z^2}$, para los valores de z con $|z| < 1$. ■

El producto de dos series de potencias es más delicado. Existen varias maneras de definir algún tipo de "producto" de dos series de potencias (el de Cauchy, el de Hadamard - o la convolución- y otros) pero el que nos interesa es el producto de Cauchy de dos series, que se corresponde de manera natural con el producto de las funciones definidas por las series en cuestión.

El concepto de producto de Cauchy, de hecho, tiene sentido para dos series numéricas pero incluso este caso básico está motivado por las series de potencias. Además, una vez demostrado formalmente, ¡se aplica a ellas! El siguiente teorema se debe al matemático polaco-aleman Franz (Franciszek) Mertens (Prusia, 1840 - Viena, 1927). El resultado que enunciamos a continuación es cierto tanto para las series de números reales como para las series complejas.

Teorema. (Mertens). Si las series numéricas $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ convergen (al menos una de ellas absolutamente) y

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}b_k \left(= \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots a_{n-1}b_1 + a_n b_0\right),$$

entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ también converge y

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,. \tag{2}$$

Observación. Antes de la demostración, veamos la motivación para esta definición, que proviene precisamente de las series de potencias. Si multiplicamos formalmente dos series de potencias de z

(como si fueran polinomios, sin ocuparnos de su convergencia), agrupando los términos que contienen la misma pontencia z^n para cada $n \geq 0$, vemos que

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) &= (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots a_n z^n + \dots)(b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots b_n z^n + \dots) \\
&= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) z + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_0 b_2) z^2 + \dots \\
&\quad + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots a_{n-1} b_1 + a_n b_0) z^n + \dots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n .
\end{aligned}$$

Poniendo ahora $z = 1$, obtenemos (2), al menos formalmente. Ahora queda por justificar la convergencia.

La demostración dada abajo se puede omitir en una primera lectura de estos apuntes, puesto que lo que más nos interesa es centrarnos en las aplicaciones del resultado.

DEMOSTRACIÓN. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge absolutamente (siendo el otro caso totalmente análogo). Sean

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n = B .$$

Hemos de demostrar, con los c_n definidos como antes, que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ converge y $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = AB$. Para simplificar la notación, definamos

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k , \qquad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k , \qquad C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k , \qquad \beta_n = B_n - B .$$

Entonces, partiendo de la definición de los c_k y agrupando los términos que contienen a_0, a_1,..., a_n respectivamente en la suma en la primera línea y agrupando los términos que contienen B en la penúltima, obtenemos

$$\begin{aligned}
C_n &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_0 b_2) + \dots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots a_{n-1} b_1 + a_0 b_n) \\
&= a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + \dots + a_n B_0 \\
&= a_0 (B + \beta_n) + a_1 (B + \beta_{n-1}) + \dots + a_n (B + \beta_0) \\
&= A_n B + a_0 \beta_n + a_1 \beta_{n-1} + \dots + a_n \beta_0 \\
&= A_n B + \gamma_n .
\end{aligned}$$

Puesto que $A_n B \to AB$ cuando $n \to \infty$, para demostrar que $C_n \to AB$, sólo queda demostrar que $\gamma_n \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Ha llegado el momento de usar la hipótesis sobre la convergencia absoluta de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Sea $\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ y sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Puesto que $B_n \to B$ cuando $n \to \infty$, sabemos que $\beta_n = B_n - B \to 0$. Por tanto, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|\beta_n| < \varepsilon$ para todo $n > N$. Entonces, usando la desigualdad triangular, para $n > N$ obtenemos

$$
\begin{aligned}
|\gamma_n| &= |a_n\beta_0 + a_{n-1}\beta_1 + \ldots + a_1\beta_{n-1} + a_0\beta_n| \\
&\le |a_n\beta_0 + a_{n-1}\beta_1 + \ldots + a_{n-N}\beta_N| + |a_{n-N+1}\beta_{N+1}| + \ldots + |a_0\beta_n| \\
&\le |a_n\beta_0 + a_{n-1}\beta_1 + \ldots + a_{n-N}\beta_N| + \varepsilon|a_{n-N+1}| + \ldots + \varepsilon|a_0| \\
&\le |a_n\beta_0| + |a_{n-1}\beta_1| + \ldots + |a_{n-N}\beta_N| + \varepsilon\alpha
\end{aligned}
$$

Manteniendo N fijo y dejando que $n \to \infty$, obtenemos que $\limsup_{n\to\infty}|\gamma_n| \le \varepsilon\alpha$, ya que la suma de los primeros $N+1$ términos tiende a 0 (razón: $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$ converge, luego $a_n \to 0$ y, por tanto, también $a_{n-1} \to 0,\ldots, a_{n-N} \to 0$, mientras que los β_j están acotados). Puesto que esto se cumple para $\varepsilon > 0$ arbitrario, se sigue que $\overline{\lim}_{n\to\infty}|\gamma_n| \le 0$ y, por tanto, $\lim_{n\to\infty}\gamma_n = 0$, QED. ■

Proposición. Si las series de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-c)^n$ tienen radios de convergencia R_a y R_b, respectivamente, y definimos

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}b_k \left(= \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right),$$

entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-c)^n$ tiene radio de convergencia $R \ge \min\{R_a, R_b\}$ y, además, coincide con el *producto de Cauchy* de las series iniciales:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-c)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-c)^n, \qquad \text{para todo } z \in D(c;R).$$

DEMOSTRACIÓN. Basta aplicar el Teorema de Mertens pero, en lugar de multiplicar dos series con términos a_n y b_n, respectivamente, multiplicamos dos series de potencias (ambas convergentes absolutamente en el disco $D(c;R)$).

Obtenemos términios con $(z-c)^n$ multiplicando cada término $a_k(z-c)^k$ por $b_{n-k}(z-c)^{n-k}$, para $0 \le k \le n$. Esto implicará la convergencia de la serie producto de Cauchy, que es otra serie de potencias.

Puesto que la serie producto converge en el disco abierto $D(c;R)$, por el Teorema de Abel tiene que ser absolutamente convergente allí y el resultado se sigue. ■

Ejercicio 11. *Calcule el producto de Cauchy de las series de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$.

SOLUCIÓN. Obsérvese que $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n = \sum_{n=0}^{\infty} nz^n$, para ajustarnos a la fórmula dada (empezando desde el índice 0). Ya sabemos que ambos factores son series que convergen en el disco unidad. Aplicando la Proposición anterior, en este caso concreto, con $c = 0$, $a_n = 1$ y $b_n = n$ para todo $n \ge 0$, vemos que

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}b_k = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2},$$

según una fórmula conocida de Conjuntos y Números y de Cálculo I que es fácil de demostrar por inducción o agrupando los términos de la suma. Por tanto,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} nz^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} z^n. \qquad ■$$

Diferenciación de series de potencias

Resulta que las series de potencias se pueden derivar, esencialmente, de la misma forma que los polinomios, es decir, término a término.

Antes de ver el resultado que nos interesa, nos conviene repasar un par de reglas sencillas que no siempre se mencionan de forma explícita en el curso de Cálculo I y que son fáciles de comprobar.

Lema. Para una sucesión no negativa $(x_n)_n$ y otra positiva $(y_n)_n$ tal que $\lim_{n\to\infty} y_n = 1$, se cumple la igualdad

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}(x_n)^{y_n} = \overline{\lim}_{n\to\infty}x_n$$

Cuando b_n, $c_n > 0$ y existe $\lim_{n\to\infty} b_n$, se tiene que

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}(b_n c_n) = \lim_{n\to\infty} b_n \cdot \overline{\lim}_{n\to\infty}c_n\,.$$

DEMOSTRACIÓN. □ Es fácil comprobar ambas afirmaciones usando la definición del límite superior (como el límite más grande de entre los que tienen las distintas subsucesiones de una sucesión). ■

El resultado fundamental de esta sección es el siguiente.

Teorema. (Derivación de series de potencias) Si la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ tiene radio de convergencia R, $0 < R \le +\infty$, entonces representa una función holomorfa en el disco abierto $D(c;R) = \{z \in \mathbb{C} : |z-c| < R\}$ y se puede derivar allí término a término:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z-c)^{n-1}\,, \tag{3}$$

siendo la derivada una nueva serie de potencias convergente en el mismo disco.

Observación. Al derivar el término constante a_0 (caso $n = 0$), obtenemos cero y por eso la nueva suma empieza desde $n = 1$.

Conviene observar también que, haciendo el cambio de índice $n-1 = k$, obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z-c)^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)a_{k+1}(z-c)^k = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}(z-c)^n\,,$$

después de sustituir k por n al final. Estas sustituciones son legítimas, como las que hacemos en una integral definida: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$.

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, veamos que la nueva serie $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z-c)^{n-1}$ tiene el mismo radio de convergencia que la inicial. Lo comprobamos usando la fórmula de Cauchy-Hadamard. En particular, podemos aplicar la primera afirmación del Lema probado anteriormente para $y_n = \frac{n}{n-1}$. Ahora es inmediato que

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}(n|a_n|)^{\frac{1}{n-1}} = \overline{\lim}_{n\to\infty}\left(n^{1/n}|a_n|^{1/n}\right)^{\frac{n}{n-1}} = \overline{\lim}_{n\to\infty}\left(n^{1/n}|a_n|^{1/n}\right) = \lim_{n\to\infty} n^{1/n}\cdot\overline{\lim}|a_n|^{1/n} = \frac{1}{R}\,.$$

Una vez comprobado que ambas series consideradas convergen en el mismo disco, procedemos a demostrar (3). Basta ver que se cumple

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-c)^{n-1}, \qquad \forall z \in D(c;R),$$

puesto que la segunda igualdad en (3) es simplemente un cambio de variable $k = n-1$ en la suma. Observemos que, escribiendo $w = z-c$, se tiene que $z \in D(c;R)$ si y sólo si $w \in D(0;R)$. A partir de la regla de la cadena, es claro que basta demostrar que

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n w^{n-1}, \qquad \forall w \in D(0;R).$$

Conviene introducir la notación

$$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n, \qquad g(w) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n w^{n-1}, \qquad |w| < R.$$

Demostraremos ahora por definición que

$$f'(w) = \lim_{h\to 0} \frac{f(w+h)-f(w)}{h} = g(w) \tag{4}$$

para w arbitrario con $|w| < R$. Fijemos un w así; sea $\delta = (R-|w|)/2 > 0$, también fijo. Nuestro objetivo es ver que, para cualquier h complejo tal que $0 < |h| < \delta$, se cumple que

$$\left|\frac{f(w+h)-f(w)}{h} - g(w)\right| \le A|h| \tag{5}$$

para cierto número positivo A y entonces (4) se seguirá.

Primero calculamos

$$\begin{aligned}\frac{f(w+h)-f(w)}{h} &= \frac{1}{h}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (w+h)^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n\right)\\ &= \frac{1}{h}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left((w+h)^n - w^n\right)\right) = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \frac{(w+h)^n - w^n}{h}.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\frac{f(w+h)-f(w)}{h} - g(w) &= a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \frac{(w+h)^n - w^n}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n w^{n-1}\\ &= \sum_{n=2}^{\infty} a_n \left(\frac{(w+h)^n - w^n}{h} - n w^{n-1}\right). \qquad (6)\end{aligned}$$

Recordemos ahora que, debido a nuestra elección del número δ, tenemos $2\delta = R - |w|$ y, por tanto, $|w| = R - 2\delta$. Además, cuando $|h| < \delta$, vemos que

$$|h|^{j-1} = |h|^{j-2}|h| < \delta^{j-2}|h|, \qquad \text{para } j \ge 2. \tag{7}$$

Finalmente, usando la fórmula del binomio (observando una cancelación), la desigualdad triangular para sumas finitas, la desigualdad (7) y, de nuevo, la fórmula del binomio, obtenemos

$$\begin{aligned}
\left|\frac{(w+h)^n-w^n}{h}-nw^{n-1}\right| &= \left|\frac{1}{h}\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}w^{n-j}h^j-nw^{n-1}\right|=\left|\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}w^{n-j}h^{j-1}-nw^{n-1}\right| \\
&= \left|\sum_{j=2}^{n}\binom{n}{j}w^{n-j}h^{j-1}\right|\le\sum_{j=2}^{n}\binom{n}{j}|w|^{n-j}|h|^{j-1} \\
&\le \sum_{j=2}^{n}\binom{n}{j}(R-2\delta)^{n-j}\delta^{j-2}|h|=\frac{|h|}{\delta^2}\sum_{j=2}^{n}\binom{n}{j}(R-2\delta)^{n-j}\delta^j \\
&< \frac{|h|}{\delta^2}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(R-2\delta)^{n-j}\delta^j=\frac{1}{\delta^2}(R-\delta)^n|h|.
\end{aligned}$$

Junto con (6), la última desigualdad (aplicada para cada $n\ge 2$) implica

$$\left|\frac{f(w+h)-f(w)}{h}-g(w)\right|\le\sum_{n=2}^{\infty}\frac{|a_n|(R-\delta)^n}{\delta^2}|h|=A|h|,$$

lo cual es la desigualdad deseada (5), ya que la suma $\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|(R-\delta)^n$ es finita (y es un valor fijo). Lo es porque la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty}a_nw^n$, por hipótesis, converge absolutamente para $|w|<R$ y, en particular, para $w=R-\delta$.

Esto completa la demostración. ■

Observación. Como acabamos de ver, dada una serie de potencias $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n$, la serie correspondiente a su derivada, $f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}na_n(z-c)^{n-1}$, converge en el mismo disco. Por tanto, la operación se puede repetir tantas veces como se quiera para calcular las derivadas sucesivas.

Volviendo a aplicar el teorema a la serie de f', obtenemos

$$f''(z)=\sum_{n=2}^{\infty}a_nn(n-1)(z-c)^{n-2}=\sum_{k=0}^{\infty}a_{k+2}(k+2)(k+1)(z-c)^k,\qquad\forall z\in D(c;R),$$

después de hacer el cambio de índice $k=n-2$.

En particular, $f''(c)=2a_2$. El proceso se puede repetir tantas veces cuantas se quiera.

Corolario. Toda serie de potencias $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n$ con un radio de convergencia $R>0$ es diferenciable (en el sentido complejo) infinitas veces en el disco $D(c;R)$ y su derivada k-ésima viene en el punto z de dicho disco viene dada por la fórmula

$$f^{(k)}(z)=\sum_{n=k}^{\infty}a_nn(n-1)\dots(n-k+1)(z-c)^{n-k},\qquad\forall k\in\mathbb{N},\ \forall z\in D(c;R).$$

En particular, cuando $z=c$, todos los términos correspondientes a los índices $k>n$ se anulan y se obtiene $f^{(k)}(c)=k!a_k$.

Ejercicio 12. *Calcule la suma de la serie de potencias*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)z^n = 2z + 6z^2 + 12z^3 + 20z^4 + \dots .$$

SOLUCIÓN. En el Ejercicio 5 ya calculamos el radio de convergencia de esta serie (que es uno). Recordemos ahora que la serie geométrica también converge absolutamente en el disco unidad, siendo su suma $\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$. Por tanto, se puede derivar término a término en el disco unidad, obteniendo:

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \left(\frac{1}{1-z}\right)' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} kz^{k-1} .$$

Derivando de nuevo, obtenemos

$$\frac{2}{(1-z)^3} = \left(\frac{1}{(1-z)^2}\right)' = \left(\sum_{k=1}^{\infty} kz^{k-1}\right)' = \sum_{k=2}^{\infty} k\,(k-1)\,z^{k-2} = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\,n\,z^{n-1} .$$

Finalmente, después de la multiplicación por z se obtiene

$$\frac{2z}{(1-z)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\,n\,z^n .$$

La convergencia de la última serie se justifica fácilmente, puesto que la multiplicación por z no cambia el radio de convergencia de la serie inicial; para ver este hecho, basta aplicar la fórmula de Cauchy-Hadamard a la nueva serie. ■

De vuelta a la función exponencial

La función exponencial es una de las funciones más importantes en las matemáticas y ya hemos visto su versión real en Cálculo I. Recordemos que esta función tiene una extensión, E, a todo el plano complejo mediante la fórmula

$$E(z) = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) , \qquad z = x + yi \in \mathbb{C} .$$

Recordemos también que esta extensión sigue teniendo las propiedades básicas relativas a su diferenciación y a las reglas algebraicas.

Resulta que la función exponencial se puede definir de varias maneras (que varían de un texto a otro) pero finalmente se puede comprobar, tal y como veremos en esta sección, que las distintas definiciones coinciden y, por tanto, son todas igualmente legítimas.

En esta sección veremos que $E(z)$ coincide con la siguiente serie de potencias:

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} , \qquad z \in \mathbb{C} .$$

Por tanto, cualquiera de las dos fórmulas vistas en clase y que aparecen en la línea anterior puede tomarse como definición de la función exponencial.

Ejercicio 13. *Compruebe que $S'(z) = S(z)$ y deduzca que $S(z) = E(z)$.*

SOLUCIÓN. ☐ Derivando la serie, obtenemos $\forall z \in \mathbb{C}$:

$$S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots = S(z).$$

Por un ejercicio visto en una entrega anterior de los apuntes, sabemos que una función entera satisface la ecuación diferencial compleja $f'(z) = f(z)$ en todo el plano si y sólo si existe una constante $C \in \mathbb{C}$ tal que $f(z) = CE(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Por tanto, $S(z) = CE(z)$ para cierta constante $C \in \mathbb{C}$. Sustituyendo $z = 0$, obtenemos $1 = S(0) = CE(0) = C$ y, por tanto, $S(z) = E(z) = e^z$ para todo $z \in \mathbb{C}$. ■

Ya conocemos la propiedad de la exponencial que viene a continuación, pero aquí daremos una prueba diferente.

Ejercicio 14. *Compruebe que la función exponencial tiene la propiedad:*

$$E(z)E(w) = E(z+w) \qquad (e^z e^w = e^{z+w}),$$

usando multiplicación de series vista antes.

Conviene observar que no procede aplicar el producto de Cauchy de series porque cada una de las expresiones $S(z)$ y $S(w)$ es una serie de potencias pero de dos variables distintas. No obstante, podemos aplicar directamente el teorema de Mertens, tal y como se indica a continuación.

SOLUCIÓN. ☐ Aplicaremos para z y w arbitarios pero fijos el producto de dos series numéricas,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{y} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n, \qquad \text{con} \quad a_n = \frac{z^n}{n!}, \quad b_n = \frac{w^n}{n!},$$

aplicando así la versión básica del Teorema de Mertens. Entonces los términos de la serie producto son

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} z^k w^{n-k} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k} = \frac{(z+w)^n}{n!},$$

según la fórmula del binomio de Newton. Por lo tanto,

$$S(z)S(w) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = S(z+w). \qquad ■$$

Veamos ahora otro manejo de la serie de la función exponencial.

Ejercicio 15. *Calcule el radio de convergencia y la suma de la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^{3n}}{n!}$.

SOLUCIÓN. ☐ El radio de convergencia de la primera serie podría calcularse como en el Ejercicio 2 (hay que tener en cuenta que muchos términos son nulos). No obstante, existe un método alternativo para calcular el radio de convergencia (y para obtener más conclusiones). Después del cambio de variable $w = z^3$, la serie se convierte en $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} w^n}{n!}$. Dado que el término general de esta nueva serie, $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$, contiene factoriales, es conveniente calcular el radio de convergencia usando la fórmula del cociente de Hadamard:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} == +\infty.$$

Puesto que la serie converge para cada $w = z^3$ finito, se sigue que la serie inicial también converge para todo z. Por lo tanto, su radio de convergencia es $+\infty$.
Podemos hacer más. Recordando la definición de la función exponencial, nuestra serie puede escribirse como sigue:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^{3n}}{n!} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z^3)^n}{n!} = -e^{-z^3},$$

de lo que también se deduce que converge absolutamente en todo el plano y uniformemente en cualquier disco cerrado. ■

Otra fórmula conocida de Cálculo I puede generalizarse también a los números complejos, proporcionándonos una tercera manera de definir la función exponencial compleja. No nos centraremos mucho en esta fórmula pero, sin duda, merece la pena mencionarla.

Teorema. Para todo $z \in \mathbb{C}$, se tiene que

$$e^z = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n.$$

La convergencia es uniforme en cada subconjunto compacto del plano.

DEMOSTRACIÓN. ☐ Aquí sólo indicaremos que la idea de la demostración consiste en usar la fórmula del binomio para desarrollar la expresión dentro del límite como suma desde 0 hasta n y expresar la función exponencial como suma infinita que se divide en dos, una desde 0 hasta n y otra para índices superiores, haciendo las estimaciones pertinentes, que requieren cierto trabajo. ■

Desarrollos de otras funciones holomorfas en series de potencias

Ya hemos visto que cada serie de potencias con un radio de convergencia $R > 0$ representa allí una función holomorfa. En una de las siguientes entregas de los apuntes, veremos que el recíproco es válido en cierto sentido: toda función holomorfa podrá escribirse como serie de potencias en cierto disco. Como preludio de este tema, veremos los desarrollos de algunas funciones elementales muy sencillas en series de potencias, usando las fórmulas ya conocidas.

Ejercicio 16. *Desarrolle las funciones coseno y seno hiperbólicos en series de potencias centradas en el origen y discuta su convergencia.*

SOLUCIÓN. Partiendo del desarrollo conocido de la exponencial:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C},$$

evaluamos la misma serie en z y $-z$ respectivamente. Luego sumamos ambas series, según una proposición vista antes:

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{1+(-1)^n}{2} z^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} z^{2k},$$

una fórmula cuyo caso especial con $z \in \mathbb{R}$ ya vimos en Cálculo. La última igualdad es tiene porque $1+(-1)^n = 0$ para n impar y para $n = 2k$ (par) se tiene $1+(-1)^{2k} = 2$.
Derivando esta serie término a término y usando la fórmula citada arriba: $(\cosh z)' = \operatorname{senh} z$, obtenemos

$$\operatorname{senh} z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k}{(2k)!} z^{2k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)!} z^{2k-1}. \qquad \blacksquare$$

Dejamos como ejercicio la deducción de fórmulas similares para las funciones seno y coseno.

Ejercicio 17. *Desarrolle en serie de potencias de z la función $\dfrac{e^z}{1-z}$ y determine su radio de convergencia.*

SOLUCIÓN. Evidentemente,

$$\frac{e^z}{1-z} = e^z \cdot \frac{1}{1-z}.$$

El primer factor se puede desarrollar en serie de potencias con radio de convergencia $R_a = +\infty$ y el segundo en serie de potencias con radio de convergencia $R_b = 1$. Por tanto, podemos multiplicar estas series, al menos en el disco unidad (puesto que la serie producto tiene radio de convergencia, por lo menos, $R = \text{mín}\{1, +\infty\} = 1$), obteniendo

$$e^z \cdot \frac{1}{1-z} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right) z^n = 1 + 2z + \frac{5}{2}z^2 + \frac{8}{3}z^3 + \frac{65}{24}z^4 + \dots,$$

una serie que converge, al menos, para $|z| < 1$.
Dejamos como ejercicio la comprobación de que el radio de convergencia es exactamente uno, usando el criterio del cociente (la fórmula de Hadamard), con $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. *Sugerencia*: en la fracción resultante, $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$, hay que dividir el numerador y el denominador por la cantidad a_n indicada, quedando la fracción en la forma $\dfrac{1}{1+c_n}$, donde $c_n \to 0$, para ver que el cociente tiende a 1. $\blacksquare$

Ejercicio 18. *Desarrolle en serie de potencias de z la función $f(z) = \dfrac{z}{2+z}$ y determine su radio de convergencia.*

SOLUCIÓN. La idea es usar la fórmula ya conocida para la serie geométrica. Empezamos con unas manipulaciones algebraicas para ajustar la forma de la función f a la forma deseada:

$$f(z) = \frac{z}{2+z} = \frac{z}{2(1+\frac{z}{2})} = \frac{z}{2}\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{2}\right)}.$$

La función $\frac{1}{1-w}$ es igual a la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} w^n$ cuando $|w| < 1$ (que ya sabemos cómo converge). Por tanto,

$$\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{2}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^n$$

cuando $|-\frac{z}{2}| < 1$, es decir, cuando $|z| < 2$. Como caso especial del corolario del Teorema de Mertens, cuando una de las series es un polinomio (o mediante un razonamiento directo, multiplicando una serie convergente por una función acotada), si multiplicamos esta serie por $z/2$, obtendremos una serie convergente en el mismo conjunto y en el mismo sentido (abstolutamente en el mismo disco y uniformemente en los discos cerrados más pequeños centrados en 0), asi que

$$f(z) = \frac{z}{2}\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{2}\right)} = \frac{z}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^{n+1} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\left(\frac{z}{2}\right)^k,$$

siendo la última serie convergente absolutamente para $|z| < 2$ y uniformemente para $|z| \le r < 2$. ■

Observación. Observamos de nuevo que la función f del Ejercicio 18 es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{-2\}$. Sin embargo, la serie de potencias centrada en el origen que la representa sólo converge en el disco $D(0;2) = \{z : |z| < 2\}$. Se trata de un fenómeno recurrente que volveremos a ver más adelante porque algo parecido pasará con todas las funciones holomorfas. La razón es muy sencilla: $D(0;2)$ es el disco más grande centrado en el origen y contenido en $\mathbb{C} \setminus \{-2\}$.

Esto nos lleva directamente al tema central del curso: holomorfía es equivalente a la analiticidad. Esta frase quiere decir que toda función holomorfa en un dominio puede escribirse como serie de potencias, centrada en un punto de dominio, en el disco más grande centrado en el punto elegido y contenido en el dominio. No obstante, para llegar a ello primero tenemos que pasar por la integración compleja, que se abordará en la siguente entrega de apuntes.

Preparado por Dragan Vukotić (UAM)