Topología (Grupo de Matemáticas, Dragan Vukotić), 2023-24

Diario de clase

Día 1 (L, 11-09-2023). Presentación: conceptos que se estudian en Topología; comentarios sobre el programa. Bibliografía. Método de evaluación.

La idea de generalizar las definiciones del Cálculo/Análisis Matemático de las que nace el concepto de una métrica, a partir de la distancia en la recta real. Definición de espacio métrico. Primeros ejemplos (en $\mathbb{R}$, posibilidad de definir otras métricas distintas de la habitual).

Día 2 (M, 12-09-2023). Más ejemplos de espacios métricos. Métrica discreta. Las métricas d_p en $\mathbb{R}^n$, $1 \le p \le \infty$, mención de la desigualdad de Minkowski. Métricas en el espacio de funciones continuas $C[a, b]$ dadas por el máximo o por integración. Composición de una métrica con una función positiva, creciente y subaditiva para generar nuevas métricas: demostración y ejemplos (fracciones, arco tangente, logaritmo).

Día 3 (X, 13-09-2023). Esferas, bolas abiertas y bolas cerradas en espacios métricos. Ejemplos de esos conjuntos en: 1) $\mathbb{R}$ con la métrica habitual, 2) un conjunto arbitrario provisto de la métrica discreta; 3) en $\mathbb{R}^2$ con las métricas d_1, d_2 y d_∞; 4) en $C[0, 1]$ con la métrica del máximo.

Conjuntos abiertos: definición. Una bola abierta es un conjunto abierto; comprobación.

Día 4 (J, 14-09-2023). Un semiplano abierto en el plano es un abierto: comprobación. El vacío y el espacio entero son abiertos. Propiedades de intersección finita y unión arbitaria de los conjuntos abiertos. Ejemplo en la recta de intersección numerable de abiertos que no es un abierto. Propiedad: un conjunto en un espacio métrico es abierto si y sólo si es unión de bolas abiertas.

Breve recordatorio: leyes de de Morgan. Conjuntos cerrados: definición y propiedades duales a las de los abiertos. Los conjuntos unipuntuales en la recta son cerrados pero no son abiertos.

Entornos; entornos abiertos. Ejemplos. Caracterización de abiertos como aquellos conjuntos que son entornos abiertos de cada uno de sus puntos.

Definición general de topología y de espacio de topológico. Ejemplos: topología inducida por una métrica, topología discreta, topología indiscreta, varios ejemplos de topologías en un conjunto de 4 elementos.

Día 5 (L, 18-09-2023). *(Clase impartida por el Prof. Luis Guijarro, para ambos grupos a la vez.)* Breve repaso de la definición de una topología y de algunos ejemplos básicos (discreta, indiscreta). Ejemplos adicionales de topologías: cofinita (en un conjunto infinito), conumerable (en un conjunto no numerable).

Comparación de topologías (topología más fina o más gruesa que otra).

Base de una topología y ejemplos que la motivan: bolas en espacios métricos. Definición de base (como en el libro de Munkres). Topología inducida por una base; comprobación que esta definición realmente genera una topología. Topologías en el plano inducida por la base de discos (bolas euclídeas en el plano) o por la base de rectángulos abiertos.

Día 6 (M, 19-09-2023). Las propiedades relativas a intersecciones y uniones de topologías, ejemplos.

De vuelta a las bases para una topología: las dos definiciones habituales. La primera (vista el día anterior): una base para una topología, sin mención de la topología concreta. La topología que genera la base; los abiertos en dicha topología son uniones de elementos de la base. La segunda definición: una base para una topología dada. Comentarios acerca de la equivalencia entre ambas definiciones.

Ejemplos en el plano: las bolas abiertas en las métricas d_2 (discos euclídeos), d_1 (rombos especiales que son cuadrados) y d_∞ (cuadrados con los lados paralelos a los ejes), así como rectángulos abiertos en el plano, todos constituyen bases para la topología usual del plano; por tanto, 1) distintas métricas pueden inducir una misma topología, 2) bases diferentes pueden generar la misma topología.

SUGERENCIA: Ya se pueden resolver los ejercicios 1-16 de la Hoja 1 de problemas.

Día 7 (X, 20-09-2023). **Elección de representantes del grupo**.

Bases: continuación. Dos formas de caracterizar la (única) topología inducida por una base dada. Las dos definiciones de una base (la definición sin mención expresa de la topología inducida y la de una base para una topología dada) son equivalentes: demostración de una implicación.

Día 8 (J, 21-09-2023). Demostración de la implicación recíproca en la equivalencia de las dos definiciones de bases vistas. Una forma de encontrar una base a partir de una topología dada.

Ejemplos adicionales de bases. Una base para la topología discreta en un conjunto arbitrario (los conjuntos unipuntuales). Otra base para la topología usual de los reales (los intervalos abiertos con ambos extremos racionales, en lugar de todos los intervalos abiertos), con comprobaciones de que cumplen una de las dos definiciones de base. Topología de Sorgenfrey y su base; comprobación de que no coincide con la topología usual.

Día 9 (L, 25-09-2023). Comparación de dos topologías de un mismo conjunto a través de sus bases. La topología de Sorgenfrey de la recta es más fina que la usual. Las bases de discos, cuadrados y rombos en el plano generan la misma topología.

Subbases: definición, primeras propiedades (las intersecciones finitas de elementos de la subbase definen una base para una topología). Descripción de la topología generada por una subbase: como la colección de uniones de intersecciones finitas de elementos de la subbase y como la topología más gruesa que contiene a la subbase. Un ejemplo de subbase para la topología usual de la recta.

Día 10 (M, 26-09-2023). Una propiedad de las subbases, relacionada con las distintas formas de verlas. Un ejemplo de subbase en un conjunto infinito; comprobación de que genera la topología cofinita.

Resolución de problemas de la Hoja 1: ejercicios **5** y **8**.

Día 11 (X, 27-09-2023). Breve repaso de las relaciones de orden: orden parcial y orden total (lineal), ejemplos en $\mathcal{P}(X)$, en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{N}$. Orden lexicográfico en $X \times X$, para un conjunto X totalmente ordenado. Ejemplos de comparación de puntos en $\mathbb{R}^2$ provisto del orden lexicográfico.

Notación para intervalos y rayos en un conjunto totalmente ordenado. Topología del orden en un conjunto X totalmente ordenado, dada por la subbase de rayos; comprobación que es una subbase. Ejemplos: la topología del orden en $\mathbb{R}$ inducida por el orden habitual es la usual, la topología del orden en $\mathbb{N}$ inducida por el orden habitual es la discreta. Los elementos de la subbase y los elementos básicos (intervalos abiertos) de la topología del orden en $\mathbb{R}^2$ con orden lexicográfico. Los elementos de la subbase y los elementos básicos (intervalos abiertos) de la topología del orden en un conjunto totalmente ordenado y formado por dos copias de la recta real.

Resolución de problemas de la Hoja 1: ejercicio **11**.

Día 12 (J, 28-09-2023). Una base para una topología en el producto cartesiano de dos espacios topológicos; definición de la topología producto de dos espacios topológicos. Reducción de la base, tomando sólo los productos de elementos básicos. Proyecciones del producto cartesiano a los espacios de coordenadas. Una subbase para la topología producto.

Ejemplos de topología producto en el plano: topología producto generada por las topologías usuales en cada recta es la topología usual del plano; topología del plano de Sorgenfrey.

Resolución de problemas de la Hoja 1: ejercicio **12**.

Día 13 (L, 02-10-2023). Topología de subespacio (topología relativa, inducida o heredada): la forma de definirla y la comprobación de las propiedades de topología. Ejemplos en la recta y en el plano (con la topología usual) y, más generalmente, en un espacio métrico (a través de la métrica restringida o inducida). Observación importante: un conjunto abierto del subespacio topológico no tiene por qué ser abierto en el espacio entero. Un caso cuando un abierto del subespacio sí es un abierto del espacio entero (cuando el subespacio es un abierto del espacio inicial).

Una base natural para la topología de subespacio. Propiedad importante: la topología subespacio en el espacio producto (de dos espacios topológicos) coincide con la topología producto de los subespacios; comprobación a través de las bases.

Resolución de problemas de la Hoja 1: ejercicio **14**.

Día 14 (M, 03-10-2023). Los conceptos básicos en espacios topológicos. Los conjuntos cerrados: definición, propiedades básicas y ejemplos en distintas topologías.

Propiedades relativas a la topología de subespacio: descripción de cerrados de un subespacio, un caso cuando un subconjunto cerrado de un subespacio es cerrado en el espacio grande, un ejemplo de la situación contraria.

Interior y cierre (clausura, adherencia) de un conjunto en un espacio topológico. Ejemplos del interior y del cierre en la recta real.

Resolución de problemas de la Hoja 1: ejercicio **17**.

Día 15 (X, 04-10-2023). Definición de un punto interior de un conjunto en un espacio topológico (en términos de entornos abiertos, de entornos generales y de entornos básicos y la equivalencia de las tres posibles definiciones). Un ejemplo en la recta real, con la topología usual. Caracterización del interior de un conjunto como la colección de todos los puntos interiores, con demostración. Ejemplo de la determinación del interior de un conjunto.

Propiedades básicas del interior y del cierre de un conjunto relativas a las inclusiones y a la coincidencia con el conjunto inicial, con algunos detalles de la demostración.

Descripción del cierre de un conjunto en términos de las intersecciones con entornos abiertos y, alternativamente, con entornos básicos, con demostración.

Día 16 (J, 05-10-2023). Resolución de problemas de la Hoja 1: ejercicios **1**, **6** i), ii), **15**.

Ejemplos de determinación del cierre y del interior de un conjunto: caso de la topología discreta, caso de la topología cofinita.

Día 17 (L, 09-10-2023). Propiedades adicionales del interior y del cierre. Comparación de los interiores y de los cierres en dos topologías tales que una es más fina que la otra. Propiedad idempotente del interior y del cierre. Comportamiento del interior y del cierre cuando un conjunto está contenido en otro. Propiedades relativas al interior y al cierre de la unión o intersección de dos conjuntos. (Demostraciones detalladas.) Un ejemplo relevante en la recta, respecto a la topología usual.

Entornos: comentarios. Notación: $\mathcal{V}(x)$ (entornos abiertos del punto x). Propiedades de intersección finita y unión arbitraria de entornos abiertos de un punto dado. Caracterización de abiertos como conjuntos que son entornos abiertos de todos sus puntos y, a la vez, entornos de todos sus puntos. Comentarios acerca de las demostraciones.

Día 18 (M, 10-10-2023). Resolución de problemas de la Hoja 2: ejercicios **2**, **5**.

Definición: puntos de acumulación (puntos límite) de un conjunto en un espacio topológico, conjunto derivado. Caso de los espacios métricos (dotados de la topología inducida por la métrica): caracterización de los puntos de acumulación en términos de las bolas abiertas en lugar de los entornos. Dos ejemplos en la recta real con la topología usual.

Día 19 (X, 11-10-2023). Un ejemplo del conjunto derivado, para un subconjunto infinito de los números naturales, dotado de la topología cofinita.

Propiedades del conjunto derivado (con demostración): su relación con el conjunto y con su clausura, caracterización de los cerrados como los conjuntos que contienen a su conjunto derivado.

Frontera (borde) de un conjunto: definición, observaciones inmediatas acerca de sus propiedades. Un ejemplo en la recta y otro en el plano (ambos dotados de sus respectivas topologías usuales). Propiedad (con demostración): el interior y el conjunto derivado de un conjunto constituyen una partición del cierre del conjunto.

Día 20 (L, 16-10-2023). Separación de puntos distintos por bolas abiertas en un espacio métrico (como motivación para la definición que sigue). Axioma de separación T_2; espacios de Hausdorff. Ejemplos: espacios métricos, espacios con topología inducida por un orden total (con comprobación). Comentarios sobre la dificultad de dar un ejemplo explícito de un espacio de Hausdorff que no sea métrico (necesidad de tener primero algunos teoremas sobre espacios metrizables).

Axioma de separación T_1. Ejemplo de un espacio que satisface T_1 pero no satisface T_2: la recta real con topología cofinita, comprobación (análisis de dos abiertos disjuntos en dicha topología). Equivalencia entre la propiedad de separación T_1, la propiedad "todo subconjunto finito del espacio es cerrado" y la propiedad "todo subconjunto unipuntual del espacio es separado", con demostración.

Día 21 (M, 17-10-2023). Equivalencia (en un espacio topológico infinito) entre la propiedad de separación T_1 y la propiedad de que la topología del espacio sea más fina que la cofinita. Un ejemplo relacionado: un espacio donde cada subconjunto finito es cerrado, pero que no es Hausdorff.

Ejemplo: espacio de Sierpiński (con dos elementos y tres abiertos) como ejemplo de un espacio que incumple el axioma T_1. Espacios con la propiedad de separación T_0 (más débil): definición. Otro ejemplo: espacios dados por la base de rayos en la recta real. Comprobación que ambos son T_0 y ninguno es T_1.

Propiedad añadida: el espacio producto de dos espacios de Hausdorff es otro espacio de Hausdorff, un subespacio de un espacio de Hausdorff es también espacio de Hausdorff.

Resolución de problemas de la Hoja 2: ejercicios **6**, **8**.

Día 22 (X, 18-10-2023). Convergencia de sucesiones en espacios topológicos y su relación con propiedades de separación. Definición de convergencia y límite en un espacio topológico. Reformulación en términos de bolas abiertas en un espacio métrico y unicidad del límite en espacios métricos.

Ejemplos de sucesiones en espacios topológicos que no son T_1 y donde una sucesión puede tener varios límites (o incluso cada punto del espacio puede ser límite): espacio de Sierpiński, recta real con la topología indiscreta.

Comentarios acerca de la insuficiencia de la hipótesis T_1 para tener la unicidad del límite (véase la nueva hoja 3 de problemas). Unicidad del límite de una sucesión convergente en un espacio de Hausdorff.

Propidades sencillas: 1) si una topología es más fina que una topología de Hausdorff, entonces también es de Hausdorff; 2) si una sucesión converge en una topología, también converge en otra más gruesa. Un ejemplo que muestra que el recíproco no es cierto (en espacios de Hausdorff): una sucesión convergente en la topología usual de la recta que no tiene límite en la de Sorgenfrey.

Una caracterización de puntos de acumulación en espacios T_1 a través de sucesiones infinitas.

Comentarios acerca de la hoja 3 y del examen parcial.

Día 23 (J, 19-10-2023). Resolución de problemas de la Hoja 2: ejercicios **1**, **9**, **11**, **19** i)–iii).

Día 24 (L, 23-10-2023). Anuncio de aulas y horarios del examen parcial (J, 26/10/2023 a las 10:25 en el aula 206, Módulo 09) y de la tutoría de grupo (M, 24/10/2023) a partir de las 15:30 en aula 207, Módulo 07.

Resolución de problemas de la Hoja 3: ejercicios **4**, **6**.

Resolución de problemas de la Hoja 2: ejercicios **18** i)–iii), **19** iv)–vi).

Día 25 (M, 24-10-2023). Recordatorio: horario y aulas de la tutoría y del primer parcial. Comentarios acerca del examen parcial.

Resolución de problemas de la Hoja 2: ejercicios **14**, **17** i), ii).

Resolución de problemas de la Hoja 3: ejercicios **3** ii) (el apartado i) ya se ha visto en clase como ejemplo), **5**.

Tutoría para un grupo numeroso (reunión no obligatoria, M, 24-10-2023, tarde). Resolución de problemas de la Hoja 2: ejercicios **4**, **7**, **17** iii), iv) **18** vi), algunas pistas para viii).

Resolución de problemas de la Hoja 3: ejercicio **1**.

Resolución de algunas dudas teóricas.

Día 26 (X, 25-10-2023). Resolución de problemas de la Hoja 2: ejercicios **18** vii), viii).

Funciones (aplicaciones) continuas entre dos espacios topológicos: definición. Caracterización de las aplicaciones continuas a través de las preimágenes de los elementos de una base o de una subbase. Ejemplos de interpretación de la continuidad: función continua de los reales en los reales, con topología usual, función continua entre dos espacios métricos.

Una caracterización de las funciones continuas (entre dos espacios topológicos arbitrarios) en términos de conjuntos cerrados, de clausuras, etc. Enunciado y comienzo de la demostración.

Día 27 (J, 26-10-2023). Examen parcial (J, 26/10/2023 a las 10:25) Aula 206, Módulo 09 (Zona del Decanato). Duración 55'. No se permite el uso de libros, apuntes ni dispositivos electrónicos. (Los estudiantes Erasmus pueden usar un diccionario.)

Día 28 (L, 30-10-2023). Caracterización de las funciones continuas en términos de conjuntos cerrados, de clausuras, etc.: demostración de las implicaciones restantes, salvo una (que queda como ejercicio). Comprobación de varias inclusiones conjuntistas que se necesitan en la prueba.

Un ejemplo de análisis de la continuidad: función identidad en la recta real, cuando la topología del espacio de partida es la usual y la del espacio de llegada es la de Sorgenfrey y al revés. Continuidad de la función constante (en cualquier espacio topológico).

Comentarios acerca del primer examen parcial.

Día 29 (M, 31-10-2023). Propiedades de continuidad y nuevas formas de producir funciones contiuas a partir de algunas funciones continuas dadas. Continuidad de la función inyección. Continuidad de la composición. Continuidad de la restricción. Formulación local de la continuidad. Extensión o restricción del conjunto de llegada. Lema del parcheado (o "pegamiento"); un ejemplo que ilustra su uso, conocido del curso de Cálculo.

Día 30 (J, 02-11-2023). Equivalencia entre la continuidad de una función de un espacio en el producto de otros dos y la de las funciones coordenadas (componentes), con demostración.

Una aplicación: continuidad de la suma, producto y cociente de dos funciones de un espacio topológico en los reales (con la topología usual), con comprobación detallada.

Continuidad local (en un punto) de una función entre dos espacios topológicos: definición. Compatibilidad de la definición con la de la continuidad global: una función es continua si y sólo si es continua en cada punto.

Convergencia de sucesiones y continuidad en espacios métricos: observaciones iniciales. Caracterización de la convergencia de una sucesión en términos de las distancias y en términos de bolas abiertas, con demostración de las equivalencias.

Día 31 (L, 06-11-2023). Ejemplos de interpretación de la convergencia en distintos espacios métricos: la convergencia en la métrica de $C[a, b]$ es la uniforme; las únicas sucesiones convergentes en la métrica discreta son las estacionarias.

Interpretación del interior, cierre, conjunto derivado y frontera en espacios métricos, en términos de bolas abiertas y/o sucesiones. Corolario: descripción de conjuntos cerrados en términos de sucesiones y sus límites (como en Cálculo).

Conjuntos acotados y su diámetro en espacios métricos. Ejemplos. Propiedades del cierre y del diámetro para conjuntos acotados.

Sucesiones acotadas, sucesiones de Cauchy. Relación entre las sucesiones convergentes, sucesiones de Cauchy y las acotadas. Comprobaciones y ejemplos pertinentes.

Día 32 (M, 07-11-2023). Espacios métricos completos; ejemplos.

Distancia de un punto a un conjunto. Relación con el cierre. Distancia entre dos conjuntos. Un ejemplo de dos conjuntos cerrados y disjuntos en el plano cuya distancia es nula. Comentarios relacionados.

Interpretación de la continuidad en un punto de una función entre dos espacios métricos, de varias maneras. Continuidad por sucesiones, con demostración (no hace falta conocer el límite). Comprobación rigurosa de que un conjunto en el plano (con la métrica euclídea) es cerrado, usando continuidad y sin usarla.

Día 33 (X, 08-11-2023). Continuidad uniforme: definición, relación con la continuidad. Propiedad relativa a las imágenes de las sucesiones de Cauchy por una función uniformemente continua. Continuidad uniforme de la función distancia de un punto hasta un conjunto fijo: demostración.

Un complemento de un tema anterior: puntos aislados (en espacios topológicos y en espacios métricos); un ejemplo, relación con el cierre y el conjunto derivado.

Idea intuitiva de la homeomorfía (semejanza de formas, deformación continua para obtener un objeto a partir de otro) y de su relevancia en Topología. Homeomorfismos: definición y propiedades básicas. Observación (basada en un ejemplo visto antes): la inversa de una función biyectiva y continua no es necesariamente continua. Homeomorfía entre espacios topológicos es una relación de equivalencia.

Ejemplos: dos intervalos abiertos cualesquiera de la recta real (incluídos los finitos, los rayos y la propia recta) son homeomorfos. Fórmulas concretas para los homeomorfismos correspondientes.

Día 34 (L, 13-11-2023). Más ejemplos de homeomorfismos: entre dos intervalos cerrados y entre dos intervalos semicerrados, entre el plano y el disco unidad. Propiedad básica de los homeomorfismos: establecen una correspondencia biyectiva entre los abiertos de un espacio y otro.

Comienzo del desarrollo de un ejemplo en la recta real, con un error que se corregirá próximamente. Más ejemplos: la aplicación natural, continua y biyectiva, entre el intervalo semiabierto y la circunferencia unidad no es un homeomorfismo (comienzo del análisis).

Día 35 (M, 14-11-2023). Fin del ejemplo del día anterior: la aplicación natural, continua y biyectiva, entre el intervalo semiabierto y la circunferencia unidad no es un homeomorfismo (usando la proposición del día anterior). Corrección del ejemplo empezado el día anterior: demostración rigurosa de que un intervalo semiabierto no es homeomorfo al intervalo cerrado con los mismos extremos, usando continuidad y el teorema del valor intermedio de Bolzano de Cálculo.

Resolución de problemas de la Hoja 4: ejercicios **6**, **9** i).

Día 36 (X, 15-11-2023). Topología producto: caso general. Repaso de la topología producto de dos espacios, generalización obvia para el producto de un número finito de espacios. Caso del producto de una cantidad numerable de espacios. Dos maneras de definir una topología en el producto cartesiano: a partir da una base (topología por cajas o paralelepípedos) y a partir de una subbase (topología producto). Observación: ambas topologías coinciden en el caso de producto finito. Cuando los factores no están dotados de la topología indiscreta, la topología por cajas es estrictamente más fina que la topología producto (con demostración).

Resolución de problemas de la Hoja 4: ejercicio **9** ii), respuesta y planteamiento de la demostración.

Día 37 (J, 16-11-2023). Breve repaso del producto directo y Axioma de elección. Notación general: $\mathbb{N}$-tuplas, $\mathbb{Z}$-tuplas, I-tuplas (I conjunto de índices arbitrario). Producto directo (Cartesiano) de una familia indexada (arbitraria) de conjuntos no vacíos. Pregunta:¿puede ser vacío o no?

Función de elección, axioma de elección, comentarios acerca de su independencia del resto de los axiomas de Zermelo-Fraenkel de la teoría axiomática de conjuntos, su equivalencia con otros resultados importantes como el Lema de Zorn, Principio de maximalidad de Hausdorff, Principio del buen orden. Algunas consecuencias que tiene y paradojas que produce: todo espacio vectorial tiene base, teorema de Hahn-Banach, existencia de conjuntos que no son Lebesgue-medibles, paradoja de Banach-Tarski. Dos enunciados diferentes: el Axioma de elección (para conjuntos distintos) y su corolario (para conjuntos arbitrarios, no necesariamene distintos), equivalencia de ambos con el hecho de que el producto Cartesiano arbitrario (de conjuntos no vacíos) es no vacío (sin demostración).

Dos topologías posibles en el espacio producto directo. La topología por cajas; comprobación de que la típica colección observada es una base para una topología en el espacio producto.

Día 38 (L, 20-11-2023). La topología producto en el producto cartesiano de una familiia de espacios topológicos: su subbase y la base inducida. Comparación con la topología por cajas: salvo casos excepcionales, la topología por cajas es más fina. Continuidad de las proyecciones sobre los espacios componentes.

Otras propiedades, sin demostración, de la topología de cajas y la topología producto, relativas al producto de subespacios, a la propiedad de Hausdorff y a la construcción de bases naturales para las topologías mencionadas. (Comentarios acerca de los problemas de la nueva Hoja 5 donde se pide demostrar dichas propiedades.)

Propiedad: en ambas topologías (cajas y producto), el cierre del producto cartesiano de subconjuntos coincide con el producto de sus respectivos cierres; demostración de una inclusión para la topología producto.

Día 39 (M, 21-11-2023). Propiedad: la continuidad de una función de un espacio en el producto directo es equivalente a la continuidad de cada coordenada, en el caso de topología producto (con demostración). El resultado deja de ser cierto para la topología de cajas; un ejemplo concreto que lo muestra.

Topología cociente: ideas para una nueva noción. La continuidad no implica que las imágenes directas de abiertos sean conjuntos abiertos; un ejemplo que lo demuestra. Aplicación abierta: definición, ejemplos (homeomorfismos, proyecciones). Observación: una aplicación abierta no necesariamente manda conjuntos cerrados en cerrados, ni siquiera cuando es continua y sobreyectiva; un ejemplo relevante con proyecciones.

Resolución de problemas de la Hoja 4: ejercicio **9** ii), demostración.

Día 40 (X, 22-11-2023). Aplicaciones cerradas: definición, ejemplos (homeomorfismos, aplicación inclusión).

Aplicación cociente (identificación): definición, reformulación en términos de conjuntos cerrados. Observación: todo homemomofismo es una aplicación cociente y toda aplicación cociente es sobreyectiva y continua, pero no se cumplen las implicaciones recíprocas. Propiedad: toda aplicación sobreyectiva, continua y abierta (o, alternativamente, cerrada) es una aplicación cociente; demostración. Un ejemplo de identificación: una aplicación de la unión de dos intervalos de la recta sobre un conjunto de dos puntos, dotado de la topología discreta; comprobaciones.

Resolución de problemas de la Hoja 4: ejercicios **9** iii), **12**.

Día 41 (J, 23-11-2023). Más ejemplos de identificaciones, comprobando que son aplicaciones sobreyectivas, continuas y abiertas (o cerradas): proyecciones, el "pegado" que une dos intervalos cerrados y disjuntos de recta, la identificación de los extremos del intervalo para obtener la circunferencia unidad. Comprobaciones detalladas de que se cumplen todas las condiciones.

Resolución de problemas de la Hoja 4: ejercicio **8** i).

Día 42 (L, 27-11-2023). Resolución de problemas de la Hoja 4: ejercicios **8** ii), **16**.

Propiedad: para toda aplicación sobreyectiva de un espacio topológico en otro conjunto, existe una única topología en el conjunto de llegada que convierte la función dada en una aplicación cociente. Comprobación.

Breve repaso: particiones y relaciones de equivalencia y la correspondencia entre ellas; conjunto cociente. Definición de la proyección natural. Aplicación de la propiedad anterior para definir la topología cociente y el espacio cociente. Comentario sobre cómo se suele definir la relación de equivalencia en el conjunto de llegada para una aplicación sobreyectiva, mención de un primer ejemplo de las identificaciones que se verán a continuación (cilindro).

Día 43 (M, 28-11-2023). Algunas identificaciones frecuentes (construcciones de espacios cociente): circunferencia unidad como espacio cociente de un intervalo cerrado y acotado, cilindro como espacio cociente de un cuadrado; análisis de los abiertos básicos en la topología cociente. Toro como espacio cociente de un cuadrado (o del plano), banda de Möbius. Mención de otros espacios cociente.

Espacios conexos: definición en términos de separaciones por abiertos; subconjuntos conexos de un espacio topológico. Caracterización de espacios conexos en términos de separaciones por cerrados y de subconjuntos que son abiertos y cerrados a la vez, con demostración. Enunciado de la caracterización de subconjuntos conexos.

Día 44 (X, 29-11-2023). Resolución de problemas de la Hoja 4: ejercicio **7**.

Demostración de la caracterización de subconjuntos conexos (una implicación). Ejemplos de espacios conexos (espacio de Sierpinski, los reales con topología usual y sus intervalos) y otros que no lo son (los reales con la topología discreta o la de Sorgenfrey) y de subconjuntos de algunos espacios que no son conexos (unión de dos intervalos disjuntos de la recta), con varias comprobaciones.

Subespacios conexos de la recta real. Conjuntos totalmente ordenados con la propiedad del supremo: definición, ejemplos. Continuo lineal: definición, ejemplos.

Día 45 (J, 30-11-2023). Los intervalos y los rayos en un continuo lineal son todos conexos (enunciado, sin demostración). Los conexos de la recta real (con su topología de orden) coinciden con los convexos y con los intervalos y rayos, con demostración (usando los argumentos similares a los del teorema general citado).

Métodos para producir más conjuntos conexos a partir de unos conocidos. Unión de conexos es conexa, si tienen intersección no vacía (con demostración). Corolario (ejercicio): unión de conexos es conexa, si todos tienen intersección no vacía con un conjunto conexo.

Invariancia de conexión por aplicaciones conexas: la imagen de un conexo por una aplicación continua es otro conexo. Ejemplo: las curvas en $\mathbb{R}^n$ son conjuntos conexos. Mención de resultados que se necesitan para ver que las superficies también son conexas (producto cartesiano de dos conexos es conexo).

Día 46 (L, 04-12-2023). Producto cartesiano finito de conexos es conexo (con demostración). Ejemplos de conexos, como aplicación de los resultados ya probados: rectángulos, gráficas, esferas.

Cualquier conjunto intermedio entre un conexo y su cierre también es conexo (con una demostración diferente de la que se pide en la Hoja 6). Un ejemplo.

Dos teoremas sobre conexión (sólo enunciados): equivalencia entre conexión y la no existencia de aplicaciones continuas sobre un conjunto de dos elementos dotado de la topología discreta; homeomorfía entre conjuntos conexos, después de quitar un punto al primero y su imagen por un homeomorfismo al segundo. Ejemplo de aplicación: un intervalo cerrado y acotado no es homeomorfo a la circunferencia unidad.

Día 47 (M, 05-12-2023). Una relación binaria relacionada con la conexión en un espacio topológico; comprobación que es una de equivalencia. Clases de equivalencia: definición de las componentes conexas, demostración de que son conjuntos convexos y que cada conjunto conexo del espacio sólo puede intersecar a una de ellas. Ejemplos de componentes conexas para algunos subconjuntos de los reales (con la topología usual): uniones de ciertos intervalos y puntos, los racionales, comentarios acerca de las componentes conexas de los reales con la topología de Sorgenfrey.

Espacios conexos por caminos: definición, ejemplos (intervalos, gráficas en el plano, plano agujereado). Demostración que todo conjunto conexo por caminos es conexo. Un ejemplo que muestra que el recíproco es falso en general: la curva seno del topologo (varios comentarios, demostraciones incompletas).

Día 48 (L, 11-12-2023). Detalles olvidados de algunos temas anteriores. Comentario sobre la terminología: es más habitual "lema de pegado" que "lema del parcheado". Fibras y conjuntos saturados respecto a una aplicación sobreyectiva: definición; caracterización alternativa de los conjuntos saturados. Criterio para que una aplicación sobreyectiva sea una aplicación cociente, en términos de conjuntos saturados (abiertos o cerrados):

Comentarios acerca del segundo examen parcial y las tutorías.

Compacidad y su utilidad en Análisis, EDPs y Geometría. Distintas caracterizaciones (o definiciones) de compacidad en el espacio euclídeo. Definición de recubrimientos, subrecubrimientos y compacidad en un espacio topológico. Ejemplos de compactos y no compactos en la recta y en el espacio euclídeo. Un ejemplo general: conjuntos finitos.

Día 49 (M, 12-12-2023). Compacidad: propiedades esenciales. La compacidad es una propiedad intrínseca del conjunto: no depende del subespacio elegido (indicación de la demostración).

Relación entre cerrados y compactos. Compacto no implica cerrado: comentarios acerca de los espacios que carecen de la propiedad T_1. Ejemplo: los compactos en la topología cofinita de la recta (enunciado). Un subconjunto cerrado de un compacto es compacto (con demostración). Lema: separación de un punto y un compacto mediante abiertos (con demostración). Los compactos en un espacio de Hausdorff son cerrados (con demostración).

Invariancia de la compacidad por aplicaciones continuas (con demostración). Teorema: toda aplicación biyectiva y continua de un compacto en un espacio de Hausdorff es un homeomorfismo (con demostración).

Propiedad de la intersección finita. Caracterización de compactos mediante la propiedad de la intersección finita de cerrados. Enunciado con indicaciones de la prueba.

Tutoría para un grupo numeroso (reunión no obligatoria, M, 12-12-2023, tarde). Resolución de problemas de la Hoja 5: ejercicios **1**, **5**, **8** y **11**.

Resolución de problemas de la Hoja 6: ejercicio **1**, **2** y **3** i)-iii).

Día 50 (X, 13-12-2023). Caracterización de compactos mediante la propiedad de la intersección finita de cerrados. Aplicación: prueba del lema de los conjuntos encajados. Comentarios acerca de la versión métrica en los espacios euclídeos (cuando los diámetros disminuyen a cero, la intersección consta de un punto).

Teorema de Tykhonov (Tíjonov o Tychonoff): el producto directo de varios conjuntos es compacto si y sólo si cada espacio factor es compacto. Demostración de la implicación fácil. Implicación difícil: demostración sólo para el caso finito, reducción (por inducción) al caso del producto de dos espacios, lema del cilindro (o del tubo) y su uso para demostrar el resultado.

Enunciado (correcto) del teorema sobre la compacidad de los intervalos en un conjunto totalmente ordenado y con la propiedad del supremo, dotado de la topología del orden. (Advertencia: la formulación en la traducción del libro de Munkres es incorrecta, a diferencia de la versión original.) Mención de la recta real y algunos de sus subespacios ordenados como ejemplos principales.

Tutoría para un grupo numeroso (reunión no obligatoria, X, 13-12-2023, tarde). Resolución de problemas de la Hoja 4: ejercicio **15**.

Resolución de problemas de la Hoja 5: ejercicio **3**.

Resolución de problemas de la Hoja 6: ejercicio **3**. iv), **4**, **5**, **7**.

Resolución de problemas de la colección de problemas selectos de algunos exámenes antiguos: **4**. pregunta 1), **5**, indicaciones generales para **2**.

Día 51 (J, 14-12-2023). Examen parcial (comienzo: a las 10:25); Aula 401, Módulo 3. Duración 50-55'. No se permite el uso de libros, apuntes ni dispositivos electrónicos. (Los estudiantes Erasmus pueden usar un diccionario.)

Día 52 (L, 18-12-2023). Un corolario olvidado sobre la equivalencia de ser cerrado y de ser compacto en un espacio compacto de Hausdorff.

Comentarios sobre la terminología: espacios bicompactos (antigua terminología para los compactos); compacidad por punto límite: definición. Compacidad implica compacidad por punto límite, con demostración. Un ejemplo que muestra que el recíproco no es cierto.

Compacidad secuencial: definición. Equivalencia entre compacidad, compacidad por punto límite y compacidad secuencial en un espacio métrico. Demostración parcial. Enunciado del lema del número de Lebesgue (para recubrimientos abiertos de un espacio métrico compacto), comentarios.

Comentarios acerca del segundo examen parcial y las últimas hojas de problemas.

Día 53 (M, 19-12-2023). Últimos comentarios acerca de la compacidad: aclaración del ejemplo de la clase anterior; mínimos y máximos de una función continua en un espacio compacto con valores reales.

Comentarios acerca de la posibilidad de demostrar que ciertos pares de espacios topológicos no son homeomorfos: la recta real y el plano (por conexión), la esfera y el plano (por compacidad). Pregunta sobre cómo demostrar que un disco y una corona no son homeomorfos; la necesidad de desarrollar la Topología algebraica.

Homotopía entre dos funciones continuas (de un espacio topológico a otro). Un ejemplo: homotopía por rectas de dos funciones continuas arbitrarias, cuando el espacio de llegada es el plano (con la topología usual).

Caminos; homotopía de dos caminos. Comprobación de que es una relación de equivalencia; clases de equivalencia. Composición de dos caminos. Lazo; punto base.

Día 54 (X, 20-12-2023). Asociatividad de la composición de caminos. La composición de clase de equivalencia de caminos homótopos está bien definida.

Definición de un lazo homótopo a un punto. Propiedad: los lazos homótopos a un punto forman una clase de equivalencia que es el neutro para la composición de clases de homotopía. Camino inverso y la clase inversa de una clase de homotopía; caso particular de lazos. Teorema: las clases de homotopía de lazos con base en un punto dado, respecto a la operación de composición, forman un grupo. Definición del primer grupo fundamental de un espacio respecto a un punto. Posibilidad de que sea el grupo trivial.

Teorema: en un espacio conexo por caminos, el primer grupo fundamental no depende del punto base. Definición de un dominio simplemente conexo. Ejemplos: los espacios euclídeos $\mathbb{R}^n$ y sus subconjuntos conexos son simplemente conexos.

Día 55 (J, 21-12-2023). Teorema: una aplicación continua entre dos espacios conexos por caminos induce un homomorfismo entre sus grupos fundamentales; un homeomorfismo induce un isomorfismo entre sus grupos fundamentales. Un ejemplo (recta y plano) que muestra que el recíproco es falso. Ejemplos de conjuntos que no son convexos, pero sí son simplemente conexos porque se pueden obtener a partir de convexos mediante aplicaciones continuas definidas por rectas verticales. Necesidad de tener más ejemplos.

Teorema: el grupo fundamental de la circunferencia es isomorfo al grupo aditivo de los números enteros (enunciado y explicación intuitiva). Repaso: producto de dos grupos (suma en la notación aditiva). Teorema: el grupo fundamental del espacio producto es isomorfo al producto de los grupos fundamentales correspondientes; indicación de la prueba. Ejemplos: toro (superficie) y toro sólido.

Retracción, retracto, retracto de deformación fuerte: definiciones, ejemplos. Teorema: el retracto de deformación fuerte de un espacio tiene el grupo fundamental al del espacio inicial (sin demostración). Ejemplos: grupo fundamental del plano agujereado, grupo fundamental del cilindro.

TOPOLOGIA - Identidades de conjuntos, curso 2023-24
Profesores: Luis Guijarro Santamaría (coordinador), Dragan Vukotic Jovsic.

Para facilitaros el trabajo, aquí van alguna identidades útiles a la hora de trabajar con conjuntos, aplicaciones, preimágenes, etc.

1. Propiedades distributivas: Para conjuntos A, B, C, se tiene que

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

2. Leyes de A. de Morgan: Para conjuntos A, B, C, se tiene que

- $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
- $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Caso especial: $A = X$ (conjunto universal), con $B, C \subset X$:

- $(B \cup C)^c = B^c \cap C^c$;
- $(B \cap C)^c = B^c \cup C^c$.

Más generalmente, para una familia indexada de conjuntos $\{A_i : i \in I\}$, se tiene que

- $(\cup_{i \in I} A_i)^c = \cap_{i \in I} A_i^c$;
- $(\cap_{i \in I} A_i)^c = \cup_{i \in I} A_i^c$.

3. Propiedades relativas a las inclusiones y operaciones con conjuntos:

- $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B$;
- $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B^c \Leftrightarrow B \subset A^c$;
- $\forall i \in I, A_i \subset B \Leftrightarrow \cup_{i \in I} A_i \subset B$;
- $\forall i \in I, B \subset C_i \Leftrightarrow B \subset \cap_{i \in I} C_i$;
- $\mathcal{B} \subset \mathcal{C} \Rightarrow \cup_{S \in \mathcal{B}} S \subset \cup_{S \in \mathcal{C}} S$;
- $\mathcal{B} \subset \mathcal{C} \Rightarrow \cap_{S \in \mathcal{B}} S \supset \cap_{S \in \mathcal{C}} S$.

4. Propiedades relativas al producto cartesiano:

- $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$;
- $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times C) \cup (A \times D \cup (B \times D)$.

5. Aplicaciones, imágenes y preimágenes - definiciones: Sea $f : X \to Y$ una aplicación entre conjuntos.

- Si $A \subset X$, la *imagen* de A mediante f, es el subconjunto de Y definido como
$$f(A) := \{\, f(a) \,:\, a \in A \,\}$$
- Si $B \subset Y$, la *preimagen* de B mediante f es el subconjunto de A definido como
$$f^{-1}(B) := \{\, a \in A \,:\, f(a) \in B \,\}$$
Observad que $f^{-1}(Y) = X$.

6. Relación entre imágenes y preimágenes. Con A, B, f como antes,

- $A \subset f^{-1}(f(A))$, con igualdad si f es inyectiva; en general, es posible que la inclusión sea estricta, por ejemplo: si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ viene dada por $f(x) = x^2$ y $A = [0,1]$, entonces $f^{-1}(f(A)) = f^{-1}([0,1]) = [-1,1]$.
- $f(f^{-1}(B)) \subset B$, con igualdad si f es sobreyectiva; en general, la inclusión puede ser estricta: para la misma f que en el apartado anterior y $B = [-1,1]$, vemos que $f(f^{-1}(B)) = f([-1,1]) = [0,1]$.

7. Imágenes, unión, intersección: Sea $f : X \to Y$ una aplicación, $A_0, A_1 \subset X$, subconjuntos. Se tiene que

- si $A_0 \subset A_1$, entonces $f(A_0) \subset f(A_1)$;
- $f(A_0 \cup A_1) = f(A_0) \cup f(A_1)$;
- $f(A_0 \cap A_1) \subset f(A_0) \cap f(A_1)$; no necesita haber igualdad (por ejemplo, esto pasa si $A_0 = [0,1], A_1 = [2,3]$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(t) = 0$);
- $f(A_0) \setminus f(A_1) \subset f(A_0 \setminus A_1)$; otra vez falla la igualdad; (por ejemplo $A_0 = [0,2]$, $A_1 = [0,1]$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(t) = 0$);

8. Preimágenes, unión, intersección: Sea $f : X \to Y$ una aplicación, $B_0, B_1 \subset Y$ subconjuntos. Se tiene que

- Si $B_0 \subset B_1$, entonces $f^{-1}(B_0) \subset f^{-1}(B_1)$;
- $f^{-1}(B_0 \cup B_1) = f^{-1}(B_0) \cup f^{-1}(B_1)$;
- $f^{-1}(B_0 \cap B_1) = f^{-1}(B_0) \cap f^{-1}(B_1)$;
- $f^{-1}(B_0 \setminus B_1) = f^{-1}(B_0) \setminus f^{-1}(B_1)$;
- $f^{-1}(B_0^c) = f^{-1}(B_0)^c$.

9. Preimágenes y composición de aplicaciones: Si tenemos aplicaciones $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, y miramos a la composición $g \circ f : X \to Z$, entonces para cualquier conjunto $C \subset Z$, se tiene que
$$(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C)).$$

5. Demuestra que si $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de bolas cerradas encajadas de $\mathbb{R}^n$, entonces $\cap_{j\in\mathbb{N}} B_j \neq \emptyset$.

Solución: Se sigue inmediatamente de la propiedad de intersección finita para conjuntos compactos. Más concretamente, si $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_n \supseteq \ldots$ es una colección de bolas cerradas anidadas en $\mathbb{R}^n$, entonces A_1 es un compacto (por ser un conjunto cerrado y acotado en $\mathbb{R}^n$), y cada A_n es un cerrado en A_1, por serlo en $\mathbb{R}^n$; además, para cualquier subcolección finita $\{A_{n_i}\}_{i=1}^k$ de los A_i's, se tiene que

$$\cap_{i=1}^k A_{n_i} = A_{n_k} \neq \emptyset,$$

donde estamos asumiendo sin pérdida de generalidad que n_i es una sucesión creciente en i. Como A_1 es compacto, se sigue que

$$\cap_{i=1}^\infty A_i \neq \emptyset.$$

---

6. Decide cuáles son los subconjuntos compactos en $\mathbb{R}$ con la topología cofinita, con la topología de los complementos numerables y, finalmente, con la topología discreta.

Solución. Observación: probablemente resultará más práctico seguir las soluciones por orden creciente de dificultad: c), a), b).

a) Respuesta: En la topología cofinita, todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$ son compactos. En efecto, si consideramos un conjunto arbitrario $A \subset \mathbb{R}$ y un recubrimiento $\{G_\alpha : \alpha \in I\}$ de A por abiertos de $\mathbb{R}$, es fácil ver que este recubrimiento tiene un subrecubrimiento finito. Basta fijarse en un abierto no vacío G_β de la colección ($\beta \in I$) y recordar que tiene que ser de la forma $G_\beta = \mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$. Luego podemos escoger, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, un G_{α_j} de la colección que contiene a x_j. Entonces

$$A \subset \mathbb{R} = \mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_n\} \cup \{x_1, \ldots, x_n\} \subset G_\beta \cup \left(\bigcup_{j=1}^n G_{\alpha_j} \right),$$

así que $\{G_\beta, G_{\alpha_1}, \ldots, G_{\alpha_n}\}$ es un subrecubrimiento finito. Esto prueba que todo recubrimiento de A por abiertos tiene un subrecubrimiento finito y, por tanto, A es compacto.

b) Respuesta: En la topología conumerable, los únicos compactos son los conjuntos finitos. Ya sabemos que, en general, todo conjunto finito es compacto en cualquier topología. Veamos el recíproco: si un conjunto $K \subset \mathbb{R}$ es compacto en la topología conumerable, entonces es finito. Esta implicación es la parte más difícil del ejercicio. Puede razonarse como sigue.

Si $K \subset \mathbb{R}$ es infinito, probaremos que no puede ser compacto. Ya sabemos de la asignatura Conjuntos y Números (o de otra similar) que, por ser infinito, K tiene un subconjunto numerable, digamos $S = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$. Por tanto, podemos escribir $K = E \cup S$, para cierto conjunto $E \subset K$ (vacío o no) tal que $E \cap S = \emptyset$; sólo el conjunto S será relevante en el razonamiento que sigue. Consideremos los siguientes conjuntos de $\mathbb{R}$:

$$U_1 = (\mathbb{R} \setminus S) \cup \{x_1\}, \; U_2 = (\mathbb{R} \setminus S) \cup \{x_2\}, \; U_3 = (\mathbb{R} \setminus S) \cup \{x_3\}, \ldots,$$

todos ellos abiertos en la topología conumerable, puesto que tienen complementarios numerables: $\mathbb{R} \setminus U_k = S \setminus \{x_k\}$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Observemos que

$$E \subset U_j, \; \forall j \in \mathbb{N}; \qquad x_k \in U_j \Longleftrightarrow j = k$$

y, por tanto, $K = E \cup \{x_1, x_2, x_3, \ldots\} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ (estos conjuntos recubren K) y si retiramos un U_ℓ del recubrimiento, se quedará el elemento x_ℓ sin cubrir (pues sólo pertenece a U_ℓ y no pertenece a ningún otro U_j). Por tanto, el recubrimiento $\{U_j \,;\, j \in \mathbb{N}\}$ de K no admite ningún subrecubrimiento y, en particular, no admite ningún subrecubrimiento finito, así que K no puede ser compacto.

c) Respuesta: En la topología discreta, los únicos compactos son también los conjuntos finitos. De nuevo, basta ver sólo una implicación: si un conjunto $K \subset \mathbb{R}$ es compacto en la topología discreta, entonces es finito. En efecto, si K es compacto, tiene como recubrimiento la colección de todos los conjuntos unipuntuales:

$$K \subset \cup_{x \in K} \{x\},$$

donde todos los conjuntos $\{x\}$ son abiertos en la topología discreta. Por ser K compacto, este recubrimiento tiene que tener un subrecubrimiento finito, así que existen $x_1, \ldots, x_n \in K$ tales que

$$K \subset \cup_{j=1}^{n} \{x_j\} = \{x_1, \ldots, x_n\}$$

y, por tanto, K es finito.

---

7. Demuestra que los conjuntos compactos en la recta de Sorgenfrey $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[\,)})$ son necesariamente numerables.

Solución: Usaremos que todo conjunto no numerable de $\mathbb{R}$ contiene una sucesión estrictamente creciente. Supongamos entonces que $A \subset \mathbb{R}$ es un subconjunto no numerable, y $a_n \in A$ con a_n creciente. Pueden suceder dos cosas:

- La sucesión a_n no está acotada superiormente: en este caso, la colección de abiertos $(-\infty, a_n)$, para $n = 1, 2, \ldots$, recubre todo A, pero ninguna subcolección finita puede hacer lo mismo: si n_0 es el índice más alto de los conjuntos de la subcolección, entonces a_{n_0} está en A pero no en ningún subconjunto de la sucesión.

- Si los a_n tienen una cota superior c_0, entonces $c_0 > a_n$ para todo n, dado que la sucesión era estrictamente creciente. Pero entonces el recubrimiento por abiertos de A dado por

  $$(-\infty, a_n), \quad (c_0, \infty)$$

  recubre todo A (al recurbir todo $\mathbb{R}$), y una vez más no admite un subrecubrimiento finito de A, como en el apartado anterior.

---

9. Prueba que si X es un espacio compacto y $\mathsf{A} \subset X$ entonces $\bar{\mathsf{A}}$ es compacto. Demuestra también que $\mathcal{B} = \{\{0, n\} : n \in \mathbb{Z}\}$ es base para una topología sobre $\mathbb{Z}$ en la que $\mathsf{A} = \{0\}$ es compacto pero $\bar{\mathsf{A}}$ no lo es. ¿Contradice esto lo anterior?

Solución. $\bar{\mathsf{A}}$ es cerrado y sabemos por un resultado de clase que todo subconjunto cerrado de un compacto es también compacto.

Para ver que $\mathcal{B}$ es una base para una topología de $\mathbb{Z}$, basta comprobar las dos condiciones habituales.

1) Para todo $m \in \mathbb{Z}$, existe un elemento B de la colección $\mathcal{B}$ tal que $m \in \mathsf{B}$. En efecto, podemos tomar $\mathsf{B} = \{0, m\}$.

2) Si B_1, $\mathsf{B}_2 \in \mathcal{B}$ y $k \in \mathsf{B}_1 \cap \mathsf{B}_2$, entonces existe otro elemento básico $\mathsf{C} \in \mathcal{B}$ tal que $k \in \mathsf{C} \subset \mathsf{B}_1 \cap \mathsf{B}_2$. En efecto, si $\mathsf{B}_1 = \{0, m\}$ y $\mathsf{B}_2 = \{0, n\}$, si $m = n$, entonces $\mathsf{B}_1 = \mathsf{B}_2$ y nos sirve $\mathsf{C} = \mathsf{B}_1 = \mathsf{B}_2$. Si $m \neq n$, entonces $k \in \mathsf{B}_1 \cap \mathsf{B}_2 = \{0\}$ y, por tanto, $k = 0$, así que podemos tomar $\mathsf{C} = \{0, 0\} = \{0\} = \mathsf{B}_1 \cap \mathsf{B}_2$.

Veamos que, en la topología de $\mathbb{Z}$ generada por $\mathcal{B}$, el conjunto $\mathsf{A} = \{0\}$ es compacto pero $\bar{\mathsf{A}}$ no lo es. Es claro que A es compacto, ya que todos los conjuntos finitos son compactos en cualquier topología.

Comprobaremos a continuación que $\bar{\mathsf{A}} = \mathbb{Z}$. Basta ver que todo $n \in \mathbb{Z}$ cumple la condición $n \in \bar{\mathsf{A}}$. Para ello, consideremos un entorno arbitrario U de n. El elemento básico $\mathsf{B} = \{0, n\}$ satisface $\mathsf{B} \subset U$ porque $n \in U$ y 0 pertenece a todo abierto de $\mathbb{Z}$ (porque $0 \in \mathsf{B}$ para todo $\mathsf{B} \in \mathcal{B}$). Por tanto, para todo U entorno abierto de n, tenemos que $U \cap \mathsf{A} \supset \mathsf{B} \cap \{0\} = \{0\} \neq \emptyset$ y, por tanto, $n \in \bar{\mathsf{A}} = \overline{\{0\}}$.

Finalmente, no hay contradicción alguna con la primera afirmación del problema porque el espacio aquí considerado, $X = \mathbb{Z}$, no es compacto en la topología inducida por $\mathcal{B}$. En efecto, $\mathbb{Z}$ se puede recubrir por los elementos básicos $\mathsf{B}_n = \{0, n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, pero de este recubrimiento no podemos extraer un subrecubrimiento finito $\mathsf{B}_{n_1}, \ldots, \mathsf{B}_{n_m}$ porque entonces tendríamos $\mathbb{Z} \subset \cup_{k=1}^{m} \mathsf{B}_{n_k} = \{0, n_1, \ldots, n_m\}$, lo cual es absurdo. (De hecho, el recubrimiento no admite ningún subrecubrimiento, como se puede comprobar fácilmente.)

---

14. Demuestra que si Y es compacto entonces $\pi_1 : X \times Y \to X$ es cerrada. Da un ejemplo de un conjunto no compacto en $\mathbb{R}^2$ cuyas proyecciones sean compactas.

Solución: Si A es cerrado en $X \times Y$ y $x \notin \pi_1(A)$, entonces

$$\{x\} \times Y \subset U := (X \times Y) \setminus A.$$

U es abierto por ser A cerrado. Gracias a que Y es compacto, el Lema del Tubo nos dice que existe un abierto $V \subseteq X$ con

$$\{x\} \times Y \subset V \times Y \subset U,$$

y por tanto, $x \in V$ con $V \cap \pi(A) = \emptyset$. Por lo tanto $X \setminus \pi(A)$ es abierto, y $\pi(A)$ cerrado, como queríamos demostrar.

Para la segunda parte del problema, consideramos el conjunto

$$A = (0,1) \times (0,1) \cup \{0\} \times [0,1] \cup \{1\} \times [0,1].$$

A no es compacto por no ser cerrado (los puntos de la forma $(0,1) \times \{0\}$, y $(0,1) \times \{1\}$ están en la clausura de A pero no en A). Pero las proyecciones de A sobre los ejes coordenados son en ambos casos el intervalo $[0,1]$.

---

15. Sea X un espacio topológico e Y un espacio de Hausdorff compacto. Probar que $f : X \to Y$ es continua si y sólo si la gráfica de f, Γ_f, es cerrada en $X \times Y$. Si X es también un espacio de Hausdorff compacto, entonces f es continua si y sólo si Γ_f es compacta.

Solución. Primero demostraremos que para cualquier conjunto $C \subseteq Y$, se tiene que

$$f^{-1}(C) = \pi_1\big((X \times C) \cap \Gamma_f\big).$$

Para ello observaremos que si $x \in f^{-1}(C)$, $f(x) \in C$ y por tanto $(x, f(x)) \in X \times C \cap \Gamma_f$. Por tanto, $x = \pi_1(x, f(x)) \subset \pi_1(X \times C \cap \Gamma_f)$. Esto implica que $f^{-1}(C) \subset pi_1(x, f(x)) \subset \pi_1(X \times C \cap \Gamma_f)$.

Por otra parte, si $x \in \pi_1(X \times C \cap \Gamma_f)$, se tiene que existe un $(x', y') \in X \times C \cap \Gamma_f$ con $x = \pi_1(x', y') = x'$. Además, como $(x', y') \in \Gamma_f$, $y' = f(x') = f(x)$, así que $f(x) \in C$, y $x \in f^{-1}(C)$.

Supongamos ahora que Y es un espacio Hausdorff y compacto. Sea $C \subset Y$ un conjunto cerrado. Entonces el conjunto $X \times C$ es cerrado en $X \times Y$. Si Γ_f es cerrada, la intersección de $X \times C$ y de Γ_f es cerrado. Por el problema anterior, π_1 es una aplicación cerrada, y $f^{-1}(C) = \pi_1((X \times C) \cap \Gamma_f)$ es por tanto cerrado en X, lo que nos deja deducir que f es continua.

Supongamos que $f : X \to Y$ es continua. Vamos a ver que el complemento de Γ_f es abierto. Para ello, sea $(x, y) \notin \Gamma_f$, por lo que $f(x) \neq y$. Como Y es Hausdorff, existen un entornos abiertos y disjuntos de $f(x)$ e y, que denotamos respectivamente por U y V. Como f es continua, $W = f^{-1}(U)$ es un entorno abierto de x. Por la definición de la topología producto, $W \times V$ es un entorno abierto de (x, y). Si $(z, f(z)) \in \Gamma_f$, y $z \in W$, entonces $f(z) \in U$ que es disjunto de V, por lo que $(z, f(z)) \notin W\ timesV$. Por lo tanto,

$$(x, y) \in W \times V \subset (X \times Y) \setminus \Gamma_f,$$

y Γ_f es cerrado.

Para la segunda parte del problema (cuando X es también compacto y Hausdorff), solo hay que notar que $X \times Y$ es compacto y Hausdorff, por lo que un subconjunto de $X \times Y$ es compacto si y solo es cerrado. Por lo tanto, f es continua si y solo si Γ_f es cerrada (por el apartado anterior) si y solo si Γ_f es compacto.

---

1. Demuestra que la relación "ser un retracto de deformación fuerte.[es] transitiva, esto es, si A lo es de B, y B de C entonces A lo es de C.

Solución: Recordamos que $\mathsf{A} \subset X$ es un retracto de deformación fuerte si existe una homotopía $H : X \times [0,1] \to X$ tal que

1. $H(x,0) = x$ para todo $x \in X$;
2. $H(x,1) \in \mathsf{A}$ para todo $x \in X$;
3. $H(a,t) = a$ para todo $a \in \mathsf{A}$ y para todo $t \in [0,1]$.

Aplicando esto al problema tenemos

1. para $X = \mathsf{C}$ y B, tenemos una $G : \mathsf{C} \times [0,1] \to \mathsf{C}$ con $G(x,0) = x$, $G(x,1) \in \mathsf{B}$, $G(b,t) = b$. Observamos que cuando $a \in \mathsf{A} \subset \mathsf{B}$, tenemos $G(a,t) = a$ para todo t;
2. para $X = \mathsf{B}$ y A tenemos una $F : \mathsf{B} \times [0,1] \to \mathsf{B}$ con $F(x,0) = x$, $F(x,1) \in \mathsf{A}$, $G(a,t) = a$.

   La idea ahora es concatenar ambas, usando que la imagen de $G(*,1) \subset \mathsf{B}$. Definimos entonces

$$H : \mathsf{C} \times [0,1] \to \mathsf{C}, \quad H(x,t) = \begin{cases} G(x,2t), & t \in [0,\frac{1}{2}], \\ F(G(x,1),2t-1), & t \in [\frac{1}{2},1]. \end{cases}$$

H es continua por el lema de pegado, ya que $G(x,1) = F(G(x,1),0)$, que corresponde a $x \in \mathsf{C}$, $s = 1/2$. Como $H(x,0) = x$ para todo $x \in \mathsf{C}$, $H(x,1) = F(G(x,1),1) \in \mathsf{A}$, y $H(a,t) = G(a,2t) = a$ cuando $t \in [0,1/2]$, $H(a,t) = F(G(a,1),2t-1) = G(a,1) = a$ cuando $t \in [1/2,1]$, tenemos que H nos da una retracción entre C y A.

---

2. Conteste a las siguientes preguntas:

1. Halla el grupo fundamental de

$$\{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

   y de

$$\{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, x^2 + y^2 \geq 4\}.$$

   Solución: Ambos conjuntos retractan por deformación a circunferencias. De hecho, se puede escoger que ambos conjuntos deformen (con una proyección radial) a la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$, por ejemplo:

- El primero deforma como

$$H((x,y),t) = (1-t)(x,y) + t(2\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, 2\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}});$$

- Para el segundo podemos usar la misma fórmula, pero con dominio el conjunto indicado.

$\{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 4\}$ es retracción de deformación fuerte de ambos, por tanto el grupo fundamental es $\mathbb{Z}$ en ambos casos.

2. El toro sólido es el espacio topológico $\mathbb{D}^1 \times \mathbb{S}^1$, donde $\mathbb{D}^1 = \{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}$. Halla su grupo fundamental.

   Solución: La idea es construir una retracción del disco $\mathbb{D}^1$ al centro (usando que es un conjunto convexo de $\mathbb{R}^2$), mientras dejamos el segundo factor invariante. Esto es, una retracción donde si $(p,q) \in \mathbb{D}^1 \times \mathbb{S}^1$, definimos

$$F((p,q),t) = ((1-t)\cdot p, q).$$

   Esto muestra que $\{(0,0)\} \times \mathbb{S}^1$ es un retracto por deformación del toro sólido, y por tanto el grupo fundamental de este coincide con el de la circunferencia que es $\mathbb{Z}$.

3. Prueba que $\mathsf{A} = \{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1\}$ y $\mathsf{A} \cup \{(1\,,0)\}$ no son homeomorfos.

   Solución: Si $f : \mathsf{A} \cup \{(1\,,0)\} \to \mathsf{A}$ fuese un homeomorfismo, A y $\mathsf{A} \setminus \{f((1,0))\}$ serían homeomorfos pero el primero es simplemente conexo (al ser convexo) y el otro no lo es.

4. Sea $\mathsf{D} = \{(x\,,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\}$. Demuestra que un homeomorfismo $f : \mathsf{D} \to \mathsf{D}$ envía la frontera en la frontera y el interior en el interior.

   Solución: Sea $q \in \mathsf{D}$; si $q \in \partial\mathsf{D}$, entonces el grupo fundamental de $\mathsf{D} \setminus q$ es trivial (ya que $\mathsf{D} \setminus q$ es convexo). Por otra parte, si $q \in \operatorname{int}\mathsf{D}$, entonces el grupo fundamental de $\mathsf{D} \setminus q$ es $\mathbb{Z}$, ya que $\mathsf{D} \setminus q$ admite una retracción fuerte a una circunferencia pequeña alrededor de q.

   Supongamos entonces que $f : \mathsf{D} \to \mathsf{D}$ es un homeomorfismo; entonces su restricción es un homeomorfismo de $\mathsf{D} \setminus \{p\}$ a $\mathsf{D} \setminus \{f(p)\}$.

   - si $p \in \partial\mathsf{D}$, y $f(p) \in \operatorname{int}\mathsf{D}$, entonces tendríamos un homeomorfismo de un espacio con grupo fundamental trivial a otro con grupo fundamental $\mathbb{Z}$;
   - si $p \in \operatorname{int}\mathsf{D}$ y $f(p) \in \partial\mathsf{D}$, entocnes tendríamos unhomeomorfismo de une soacio con grupo fundamental $\mathbb{Z}$ a otro con grupo fundamental trivial.

---

3. Decide razonadamente si los siguientes espacios topológicos son homeomorfos:

(a) $X = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \times (\mathbb{S}^2 \setminus \{(0\,,0\,,1)\})$.

(b) $Y = \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{S}^2 \setminus \{(0\,,0\,,1)\})$.

(c) $Z = \mathbb{R}^4$.

Solución: La respuesta es que solo los dos últimos espacios son homeomorfos. Para ver esto, empezamos examinando el factor $\mathbb{S}^2 \setminus (0,0,1)$, y notando que la proyección estereográfica desde el polo norte es un homeomorfismo

$$\pi_N : \mathbb{S}^2 \setminus (0,0,1) \to \mathbb{R}^2.$$

dado que es continua con inversa continua (calculada en el curso de curvas y superficies). Por lo tanto, X es homeomorfo a $X' := \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2$ (y trabajaremos a partir de ahora con este espacio más sencillo en vez de X), e Y es homeomorfo a $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, que es $\mathbb{R}^4$. Esto nos da automáticamente que Y y Z son homeomorfos. Falta ver si son también homeomorfos a X'.

Para ver que no lo son, calculamos los grupos fundamentales de cada espacio:

- el de Y y Z es trivial, ya que $\mathbb{R}^4$ es convexo y se pueden usar homotopías de línea recta para deformar cualquier lazo a su punto base;
- el grupo fundamental de X' es $\mathbb{Z}$, ya que se puede construir una retracción fuerte de X' a la circunferencia $\{0\} \times \mathbb{S}^1 \times \{0\}$; más en concreto,

  $$F : X' \times [0,1] \to X', \qquad F((p,q,r),t) = (t \cdot p, q, t \cdot r)$$

  dónde $p \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{S}^1$, $r \in \mathbb{R}^2$

Como tienen diferente grupo fundamental, no son homeomorfos.

---

4. Indica razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

1. Si A y D son subespacios simplemente conexos con $\mathsf{A} \cap \mathsf{D} \neq \emptyset$, entonces $\mathsf{A} \cup \mathsf{D}$ también lo es.

   Solución: Falso: $\mathsf{A} := \mathbb{S}^1 \cap \{x \geq 0\}$ y $\mathsf{D} := \mathbb{S}^1 \cap \{x \leq 0\}$.

2. Si X es homeomorfo a la frontera de $[0\,,1] \times [0\,,1]$, el grupo fundamental de X es isomorfo a $\mathbb{Z}$.

   Solución: Cierto. De hecho X es homeomorfo a una circunferencia, como se puede ver usando una proyección radial desde algún punto en el interior.

3. Si el grupo fundamental de X es isomorfo a $\mathbb{Z}$ entonces X es homeomorfo a $\mathbb{S}^1$.

   Solución: Falso. En clase vimos que $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ tenía grupo fundamental $\mathbb{Z}$ (al ser $\mathbb{S}^1$ un retracto por deformación), pero no era homeomorfo a la circunferencia $\mathbb{S}^1$ por ser ésta compacta y $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ no.

4. Si A y D son retractos de deformación fuerte de espacios homeomorfos, entonces A y D son homeomorfos.

   Solución: Falso. Por ejemplo, la circunferencia $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{RP}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ y el anillo $\{x^2 + y^2 \geq 1\}$ son ambos retractos por deformación de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, pero uno es compacto y el otro no.

---

5. Decide razonadamente si los siguientes espacios topológicos son homeomorfos:

1. $X_1 = \{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, (x-1)^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, (x+1)^2 + y^2 \leq 1\}$.
2. $X_2 = \{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, x^2 + y^2 < 1\}$.
3. $X_3 = \{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$.
4. $X_4 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0\,,y) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, -1 < y < 1\}$.

Solución: Ningún par de ellos resulta homeomorfos:

- Si X_1 fuera homeomorfo a alguno de los otros espacios, entonces $X_1 \setminus (0, 0)$ sería homeomorfo a algún $X_i \setminus \{p\}$ para algún punto p; pero $X_i \setminus \{p\}$ es conexo mientras que $X_1 \setminus (0, 0)$ no lo es.
- X_3 es compacto, mientras que X_2 y X_4 no lo son.
- Finalmente, X_2 y X_4 no pueden ser homeomorfos porque tienen diferente grupo fundamental: X_2 es convexo, así que su grupo fundamental es trivial, mientras que X_4 tiene a la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ como retracto por deformación, así que su grupo fundamental es $\mathbb{Z}$.
