

## Cálculo I (Grado en Ingeniería Informática)

### Problemas resueltos, 2015-16 (tercera parte)

Preparado por Pablo Fernández, Luis Guijarro y Dragan Vukotić (coordinadores recientes de la asignatura)

1. Para la función  $f(x) = x \operatorname{sen} x$ , halle su polinomio de Taylor de orden 2 en  $a = 0$ .

SOLUCIÓN. La respuesta es:  $P_2(x) = x^2$ . Como recordaremos de la teoría vista en clase, los polinomios de Taylor en  $a = 0$  de la función  $\operatorname{sen} x$  son

$$x, \quad x - \frac{x^3}{3!}, \quad x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!},$$

etc. Multiplicándolos por  $x$ , obtenemos que los polinomios correspondientes de  $f(x)$  son  $x^2$ ,  $x^2 - x^4/3!$ , etc. El primero es de grado 2 mientras que el siguiente ya es de grado 4; por tanto,  $P_2(x) = x^2$ .

Otra manera de llegar a la misma conclusión es calculando

$$f'(x) = \operatorname{sen} x + x \cos x, \quad f''(x) = 2 \cos x - x \operatorname{sen} x$$

y evaluándolos en  $x = 0$ , para luego calcular  $P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 = x^2$ .

2. Calcule el polinomio de Taylor de grado 6 de la función  $f(x) = \cos x$  en el punto  $x = 0$ . Utilizando la fórmula anterior, calcule  $g^{(8)}(0)$  de la función  $g(x) = \cos x^2$ .

SOLUCIÓN. Calculando las derivadas de  $f$  de todos los órdenes hasta 6 y aplicando la fórmula general para el polinomio de Taylor o, alternativamente, partiendo de la fórmula (vista en clase) para la serie de Taylor de la función coseno en  $x = 0$ , obtenemos

$$P_6(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$$

Sustituyendo  $x^2$  en lugar de  $x$ , se obtiene el polinomio de Taylor (Maclaurin) de orden 12 de la función  $g$ :

$$1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{12}}{6!}$$

El coeficiente al lado de  $x^8$  es igual a  $g^{(8)}(0)/8!$ . Igualando ambas cantidades, vemos que

$$\frac{1}{4!} = \frac{g^{(8)}(0)}{8!}.$$

Despejando, obtenemos

$$g^{(8)}(0) = \frac{8!}{4!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 56 \cdot 30 = 1680.$$

3. Consideremos la función

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \frac{\pi^2 x^2}{8}.$$

Determine el polinomio de Taylor de orden 3 de la función  $f$  centrado en  $x = 0$ .

SOLUCIÓN. Hay varias formas de hacer este problema. La más rápida es usar la fórmula para el polinomio de Taylor de  $\cos x$  reemplazando la  $x$  por  $\frac{\pi x}{2}$ , y recordar que el polinomio de Taylor de grado 3 de  $\frac{\pi^2 x^2}{8}$  centrado en 0 coincide con  $\frac{\pi^2 x^2}{8}$ . Esto nos daría

$$p_{3,0}(x) = 1 - \frac{\left(\frac{\pi x}{2}\right)^2}{2} - \frac{\pi^2 x^2}{8} = 1 - \frac{\pi^2 x^2}{8} - \frac{\pi^2 x^2}{8} = 1 - \frac{\pi^2 x^2}{4}.$$

La otra posibilidad es hallar  $f(0), f'(0), \dots, f'''(0)$  y sustituir en la fórmula del polinomio de Taylor. Esto resulta en

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \frac{\pi^2 x^2}{8}, \\ f'(x) &= -\frac{\pi}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \frac{\pi^2 x}{4}, \\ f''(x) &= -\frac{\pi^2}{4} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \frac{\pi^2}{4}, \\ f'''(x) &= \frac{\pi^3}{8} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right), \end{aligned}$$

y en

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = -\frac{\pi^2}{2}, \quad f'''(0) = 0.$$

Con lo que al sustituir en la fórmula del polinomio de Taylor nos queda el polinomio  $p_{3,0}(x)$  anterior.

4. Estime el error de aproximación de la función  $f(x) = \cos x$  cerca de  $a = 0$  por el polinomio de Taylor de grado 3 y en el punto  $x = \frac{1}{10}$ .

SOLUCIÓN. Para obtener el polinomio de Taylor  $P_n(x)$  de orden  $n$  de la función coseno, tenemos dos formas de proceder:

1) usar el desarrollo de  $\cos x$  en serie de Taylor alrededor de  $a = 0$ ; en este caso:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots,$$

truncando luego la serie después de la potencia  $x^n$ ;

2) calcular las derivadas sucesivas  $f'(x), f''(x), f'''(x), \dots$ , evaluándolas en  $a = 0$ , etc.

De cualquiera de las dos maneras, obtendremos:

$$P_0(x) = 1 = P_1(x), \quad P_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2} = P_3(x), \quad P_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} = P_5(x), \quad \dots$$

Los polinomios  $P_2$  y  $P_3$  coinciden porque  $f'''(0) = 0$ , lo cual significa que no hay ningún término con  $x^3$ .

Lo que nos interesa en concreto en este caso es  $P_3(x) = 1 - x^2/2$  y  $x = 1/10$ . El error que se comete al aproximar  $\cos x$  por  $P_3(x)$ , según la fórmula vista en clase, es igual a  $E = f^{(4)}(c)(x - a)^4/4!$  para algún punto  $c$  entre  $a = 0$  y  $x = 1/10 = 0,1$ . Recordando que  $f^{(4)}(x) = \cos x$ , tenemos la siguiente estimación para  $E$ ;

$$|E| \leq \frac{|f^{(4)}(c) \cdot 0,1^4|}{24} = \frac{|\cos c| \cdot 0,0001}{24} \leq \frac{0,0001}{24} \approx 0,00004167.$$

5. Calcule la integral indefinida

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos x \, dx .$$

SOLUCIÓN. Aplicando el cambio de variable:  $\operatorname{sen} x = t$ ,  $\cos x \, dx = dt$ , la integral se transforma en

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos x \, dx = \int t^2 \, dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + C ,$$

siendo  $C$  una constante arbitraria.

6. Calcule la integral indefinida

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x \, dx ,$$

aplicando la relación fundamental entre las funciones trigonométricas:  $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

SOLUCIÓN. Observemos que

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x \, dx = \int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \cos x \, dx = \int \operatorname{sen}^2 x (1 - \operatorname{sen}^2 x) \cos x \, dx .$$

Al igual que antes, podemos aplicar el cambio de variable  $\operatorname{sen} x = t$ , obteniendo  $\cos x \, dx = dt$ . La integral se convierte en

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x \, dx = \int t^2(1 - t^2) \, dt = \int (t^2 - t^4) \, dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} - \frac{\operatorname{sen}^5 x}{5} + C .$$

7. Calcule la integral indefinida

$$\int \operatorname{sen}^5 x \, dx .$$

SOLUCIÓN. Aplicando el cambio de variable:  $\cos x = t$ ,  $-\operatorname{sen} x \, dx = dt$ , la integral se transforma en

$$\int \operatorname{sen}^5 x \, dx = \int (\operatorname{sen}^2 x)^2 \operatorname{sen} x \, dx = - \int (1 - t^2)^2 dt = \frac{t^3}{3} - t + C = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C ,$$

donde la constante  $C$  es arbitraria.

8. Calcule la integral indefinida  $\int \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \, dx$ .

SOLUCIÓN. Aplicando Integración por partes, con  $u = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$  y  $dv = dx$ , obtenemos

$$du = \frac{1}{x^2 + 1} \, dx , \quad v = x .$$

Por lo tanto, según la fórmula para la Integración por partes, se obtiene

$$\int \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \, dx = x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \int \frac{x \, dx}{x^2 + 1} = x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \frac{1}{2} \frac{1}{x^2 + 1} + C .$$

(La última integral se suele calcular o bien directamente o bien mediante la sustitución  $x^2 + 1 = t$ .)

9. Calcule razonadamente la integral  $I = \int_1^3 \frac{x dx}{x^4 + 1}$ .

SOLUCIÓN. Hacemos el cambio de variable  $u = x^2$ , con lo que  $du = 2x dx$  y  $x^4 + 1 = u^2 + 1$ : la integral queda entonces como

$$I = \int_1^9 \frac{du}{2(u^2 + 1)}$$

(observe que hemos cambiado los límites de la integral de acuerdo con el cambio de variable). En esta integral reconocemos la derivada de la arco tangente, así que

$$I = \frac{1}{2} \int_1^9 \frac{du}{u^2 + 1} = \frac{1}{2} [\operatorname{arc\,tg} u]_1^9 = \frac{1}{2} (\operatorname{arc\,tg} 9 - \operatorname{arc\,tg} 1)$$

Se puede escribir un poco más si se reconoce que  $\operatorname{arc\,tg}(1) = \pi/4$ .

10. Calcule el valor exacto de la integral

$$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$$

SOLUCIÓN. Aplicando el *cambio de variable*  $\sqrt{x} = t$  en nuestra integral definida, obtenemos:

$$\frac{dx}{2\sqrt{x}} = dt, \quad x = t^2; \quad x = 1 : t = 1, \quad x = 3 : t = \sqrt{3},$$

de manera que

$$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = 2 \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2} = 2 \operatorname{arc\,tg} x|_1^{\sqrt{3}} = 2 \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{6}.$$

11. Evalúe la integral indefinida

$$\int \frac{dx}{9x^2 + 6x + 5}$$

SOLUCIÓN. Completando el cuadrado en el denominador:

$$9x^2 + 6x + 5 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x + 1 + 4 = (3x + 1)^2 + 4,$$

obtenemos

$$I = \int \frac{dx}{9x^2 + 6x + 5} = \int \frac{dx}{(3x + 1)^2 + 4} = \frac{1}{4} \cdot \int \frac{dx}{\left(\frac{3x+1}{2}\right)^2 + 1}.$$

Después del siguiente cambio de variable (bastante obvio):

$$(3x + 1)/2 = t, \quad dx = (2t/3) dt,$$

se obtiene

$$I = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{6} \operatorname{arc\,tg} t + C = \frac{1}{6} \operatorname{arc\,tg} \frac{3x + 1}{2} + C,$$

donde  $C$  denota una constante real arbitraria.

12. Calcule la integral indefinida

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cos x}.$$

SOLUCIÓN. Primero aplicamos un truco visto en otros ejercicios similares:

$$I = \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cos x} = \int \frac{\cos x dx}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x}$$

y luego el cambio de variable  $t = \operatorname{sen} x$ . Observemos que  $|t| < 1$  y  $t \neq 0$  puesto que  $\operatorname{sen} x \cos x \neq 0$ . Del cambio de variable obtenemos que

$$dt = \cos x dx, \quad \cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x = 1 - t^2$$

y, por tanto,

$$I = \int \frac{dt}{t^2(1-t^2)} = \int \frac{dt}{t^2(1+t)(1-t)}.$$

De esta manera hemos conseguido reducir la integral  $I$  a la integral de una función racional de  $t$ . Ésta se puede calcular usando las **fracciones simples o parciales**:

$$\frac{1}{t^2(1+t)(1-t)} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{1-t} + \frac{C}{t} + \frac{D}{t^2}.$$

Multiplicando ambos lados por el denominador de la izquierda:  $t^2(1+t)(1-t)$ , obtenemos la condición

$$1 = At^2(1-t) + Bt^2(1+t) + Ct(1-t^2) + D(1-t^2).$$

Agrupando los términos constantes y los términos que contienen a  $t$ ,  $t^2$  y  $t^3$  respectivamente, vemos que

$$1 = D + Ct + (A + B - D)t^2 + (-A + B - C)t^3.$$

Para que el polinomio (constante) a la izquierda y el polinomio a la derecha sean iguales para todo  $t \in \mathbb{R}$ , es necesario y suficiente que sus coeficientes correspondientes sean iguales, luego

$$D = 1, \quad C = 0, \quad A + B - D = 0, \quad -A + B - C = 0.$$

De ahí se sigue inmediatamente que  $D = 1$ ,  $C = 0$ ,  $A + B = 1$  y  $B = A$ . De las dos últimas ecuaciones fácilmente obtenemos  $A = B = 1/2$ . Por lo tanto,

$$\frac{1}{t^2(1+t)(1-t)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-t} + \frac{1}{t^2},$$

que es la representación buscada. Puesto que  $1+t > 0$  y  $1-t > 0$  podemos aplicar la fórmula

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C, \quad x > 0.$$

Integrando obtenemos

$$I = \frac{1}{2} \ln(t+1) - \frac{1}{2} \ln(1-t) - \frac{1}{t} + C = \frac{1}{2} \ln \frac{t+1}{1-t} - \frac{1}{t} + C,$$

donde  $C \in \mathbb{R}$  es una constante arbitraria. Finalmente, sustituyendo de nuevo  $t = \operatorname{sen} x$ , vemos que

$$I = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x} + C.$$

13. Evalúe la integral definida

$$\int_{\sqrt{3}}^3 \frac{dx}{(x-1)(9+x^2)}.$$

SOLUCIÓN. Primero descomponemos la fracción en suma de fracciones simples. Dado que  $9+x^2 \geq 9 > 0$ , este trinomio cuadrático no tiene ceros reales, luego no se puede factorizar más (en factores lineales con coeficientes reales). Por tanto, según la teoría, buscamos los números reales  $A$ ,  $B$  y  $C$  para los que

$$\frac{1}{(x-1)(9+x^2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{9+x^2}$$

para todo  $x$ . Multiplicando ambos lados por  $(x-1)(9+x^2)$ , obtenemos

$$1 = A(9+x^2) + (x-1)(Bx+C) = (A+B)x^2 + (C-B)x + 9A - C, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Comparando los coeficientes del polinomio a la derecha con los del polinomio constante uno, deducimos que

$$A+B=0, \quad C-B=0, \quad 9A-C=1.$$

Por tanto,  $B=C=-A$  y  $10A=1$ , luego  $A=1/10$  y  $B=C=-1/10$ . Finalmente,

$$\frac{1}{(x-1)(9+x^2)} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{10} \cdot \frac{x+1}{9+x^2} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{10} \cdot \frac{x}{9+x^2} - \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{9+x^2}.$$

La primera fracción se integra directamente, hay que tener en cuenta que  $x-1 > 0$  puesto que  $x \in [\sqrt{3}, 3]$ . La segunda fracción se integra usando el cambio de variable  $t=1+x^2$  y la tercera, directamente o poniendo primero  $x=3t$ . El resultado final es

$$\begin{aligned} \int_{\sqrt{3}}^3 \frac{dx}{(x-1)(9+x^2)} &= \left( \frac{1}{10} \ln(x-1) - \frac{1}{20} \ln(9+x^2) - \frac{1}{30} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{3} \right) \Big|_{\sqrt{3}}^3 \\ &= \frac{1}{10} \ln \frac{2}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{20} \ln \frac{18}{12} - \frac{1}{30} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) \\ &= \frac{1}{10} \ln(\sqrt{3}+1) - \frac{1}{20} \ln \frac{3}{2} - \frac{\pi}{360}. \end{aligned}$$

14. Calcule el valor de la integral  $\int_0^{\ln 2} xe^x dx$ .

SOLUCIÓN. Integrando por partes:

$$u = x, \quad dv = e^x dx, \quad du = dx, \quad v = e^x,$$

obtenemos

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

Por el Primer Teorema Fundamental del Cálculo, tenemos que

$$\int_0^{\ln 2} xe^x dx = (xe^x - e^x) \Big|_0^{\ln 2} = \ln 2 e^{\ln 2} - e^{\ln 2} - (0 - e^0) = 2 \ln 2 - 2 + 1 = 2 \ln 2 - 1.$$

15. Calcule el área comprendida entre las curvas  $f(x) = \frac{1}{x}$  y  $g(x) = 4 - x$ .

SOLUCIÓN. Los puntos de intersección de las dos gráficas se encuentran resolviendo la ecuación  $f(x) = g(x)$ , es decir,  $\frac{1}{x} = 4 - x$ . Para  $x \neq 0$ , la ecuación es equivalente a  $1 = 4x - x^2$ , que es lo mismo que  $x^2 - 4x + 1 = 0$ . Las soluciones de esta ecuación cuadrática son

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3},$$

siendo ambas positivas y menores que 4 ya que  $2 > \sqrt{3}$ . Observando las gráficas de las funciones  $f$  y  $g$  entre  $x = 2 - \sqrt{3}$  y  $x = 2 + \sqrt{3}$ , vemos que  $g(x) > f(x)$  en dicho intervalo y que encierran una región en forma parecida a la de media luna, contenida en el triángulo con los vértices  $(0, 0)$ ,  $(4, 0)$  y  $(0, 4)$ . Esto se puede comprobar algebraicamente, pues en el intervalo  $(2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$  se cumple  $x^2 - 4x + 1 < 0$ , luego  $1 < 4x - x^2$  y, al ser  $x$  positivo, podemos dividir por  $x$  para deducir que  $4 - x > \frac{1}{x}$ .

El área entre las dos gráficas es, por tanto,

$$A = \int_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}} (g(x) - f(x)) dx = \int_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}} \left( 4 - x - \frac{1}{x} \right) dx = \left( 4x - \frac{x^2}{2} - \ln|x| \right) \Big|_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}} = 4\sqrt{3} - \ln \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}.$$

16. Halle los máximos y mínimos locales de la función  $F$  que viene dada por  $F(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2} dt$ .

SOLUCIÓN. Conviene recordar el comentario hecho en clase que la integral indefinida  $\int e^{-t^2} dt$  NO es una función elemental (no existe una "fórmula cerrada" para expresarla). De ahí que estudiamos la integral  $\int_0^x e^{-t^2} dt$  y similares. Considerando la función  $g(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ , vemos que  $F$  es la función compuesta de  $g$  y  $h(x) = x^2$ , es decir:  $F(x) = g(x^2) = g(h(x))$ . Por tanto, la *Regla de la Cadena* y el *Segundo Teorema Fundamental del Cálculo* nos dicen que

$$F'(x) = g'(x^2) \cdot 2x = 2xe^{-x^2}.$$

Es obvio que  $F'(x) = 0$  sólo cuando  $x = 0$  (es decir,  $F$  sólo tiene ese punto crítico). Puesto que  $e^{-x^2} > 0$  para todo  $x$  real, concluimos que  $F'(x) > 0$  para  $x > 0$  y  $F'(x) < 0$  para  $x < 0$ . Por lo tanto,  $F$  decrece en el intervalo  $(-\infty, 0)$  y crece en  $(0, +\infty)$  y, por consiguiente, tiene un mínimo absoluto en  $x = 0$ . El valor mínimo es  $F(0) = 0$ .

17. Calcule la derivada de la función  $F(x) = \int_{x^2}^{e^x+x} \ln(t^2 + 1) dt$ .

SOLUCIÓN. Primero representamos  $F$  como diferencia de dos integrales:

$$F(x) = \int_{x^2}^{e^x+x} \ln(t^2 + 1) dt = \int_0^{e^x+x} \ln(t^2 + 1) dt - \int_0^{x^2} \ln(t^2 + 1) dt.$$

Derivando cada integral por separado (como en el problema anterior), obtenemos:

$$F'(x) = (e^x + 1) \ln((e^x + x)^2 + 1) - 2x \ln(x^2 + 1).$$

18. Si  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua y  $\int_0^1 f(t) dt = 1$ , ¿es cierto que siempre existe  $c \in (0, 1)$  tal que  $\int_0^c f(t) dt = \frac{1}{3}$ ? Razone la respuesta.

SOLUCIÓN. Sí, esto se cumple siempre. Damos la prueba a continuación.  
En primer lugar, puesto que  $f \in C[0, 1]$ , podemos definir la función  $F$  mediante

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt, \quad x \in [0, 1].$$

Según el *Teorema Fundamental del Cálculo*,  $F$  es diferenciable y, por tanto, continua en el mismo intervalo. Además,  $F$  cumple

$$F(0) = \int_0^0 f(t) dt = 0, \quad F(1) = \int_0^1 f(t) dt = 1.$$

Puesto que  $0 < 1/3 < 1$ , por el *Teorema de Bolzano* se sigue que existe  $c \in (0, 1)$  tal que  $F(c) = 1/3$ ; es decir,

$$\int_0^c f(t) dt = \frac{1}{3}.$$

19. (a) Determine los puntos críticos de la función

$$F(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt, \quad x \in \left( \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right),$$

en el intervalo indicado. (Nótese que  $\int \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$  no se puede expresar con fórmulas habituales.)

- (b) Razone si los puntos críticos encontrados son puntos de máximo o mínimo o no.

SOLUCIÓN. (a) Aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo, derivamos la función  $F$ , obteniendo

$$F'(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}, \quad x \in \left( \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right).$$

Para encontrar los puntos críticos de  $F$ , igualamos la derivada a cero y obtenemos  $\operatorname{sen} x = 0$ . Recordando que  $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ , la única posibilidad es  $x = \pi$ .

(b) Para decidir si el punto crítico encontrado,  $x = \pi$ , es un punto de extremo local o no, calculamos la segunda derivada de  $F$  (aplicando la regla del cociente) y examinamos su signo en dicho punto:

$$F''(x) = \left( \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right)' = \frac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}; \quad F''(\pi) = \frac{\pi \cdot (-1) - 0}{\pi^2} = -\frac{1}{\pi} < 0.$$

Por tanto, el punto crítico es un punto de máximo local.

20. Definamos la función  $F$  mediante la fórmula  $F(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2} dt$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

(a) Calcule razonadamente su derivada,  $F'(x)$ . Luego determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los puntos de máximo y mínimo de la función  $F$ .

(b) Determine los intervalos de convexidad y concavidad de  $F$  y los puntos de inflexión.



SOLUCIÓN. (a) La función  $f$  es composición de las funciones  $G(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$  y de  $g(x) = x^2$ , i.e.,  $F(x) = G(g(x))$ . Por la regla de la cadena,

$$F'(x) = G'(g(x)) \cdot g'(x) = e^{-(x^2)^2} \cdot 2x = 2xe^{-x^4}$$

donde hemos usado que por el teorema fundamental del cálculo,  $G'(x) = e^{-x^2}$ .

Para calcular intervalos de crecimiento y decrecimiento, buscamos los intervalos donde  $F'(x)$  sea positiva y negativa.  $F'(x)$  tiene un único cero, ya que  $e^{-x^4}$  es siempre positivo, y  $F'(x)$  sólo se anulará donde lo haga  $x$ ; además  $F'(x)$  tiene el signo de  $x$ ; por ello,  $F$  es decreciente en  $(-\infty, 0)$  y creciente en  $(0, \infty)$ . Esto implica que  $F$  tiene un único mínimo en  $x = 0$ , que además debe ser un mínimo global.

(b) Empezamos calculando la segunda derivada de  $F$ :

$$F''(x) = e^{-x^4} + x(-4x^3)e^{-x^4} = (1 - 4x^4)e^{-x^4}$$

$F''$  se anula sólo cuando  $1 - 4x^4 = 0$ , lo que ocurre en los puntos  $x = \pm 1/\sqrt{2}$ . Por ello examinamos el signo de  $F''$  en los intervalos  $(-\infty, -1/\sqrt{2})$ ,  $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$  y  $(1/\sqrt{2}, \infty)$  evaluando  $F''$  en un punto de cada uno:

$$F''(-1) = -3e^{-1} < 0, \quad F''(0) = 1, \quad F''(1) = -3e^{-1}$$

Por lo tanto  $F$  es cóncava en  $(-\infty, -1/\sqrt{2})$  y  $(1/\sqrt{2}, \infty)$  y convexa en  $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ . Los puntos  $x = -1/\sqrt{2}$  y  $1/\sqrt{2}$  corresponden a puntos de inflexión, ya que se cambia de cóncavo a convexo o viceversa.

21. Compruebe si la integral impropia  $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$  converge o diverge. Use la conclusión obtenida para decidir la convergencia o divergencia de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$ .

SOLUCIÓN. Integrando por partes, con la elección  $u = x$ ,  $dv = e^{-x}$ , obtenemos

$$du = dx, \quad v = -e^{-x}$$

y

$$\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = (-x e^{-x}) \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = (-e^{-x}) \Big|_0^{+\infty} = 1$$

y, por tanto, la integral converge. La igualdad

$$(-x e^{-x}) \Big|_0^{+\infty} = 0$$

debe interpretarse como sigue:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x e^{-x}) = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0,$$

por ejemplo, aplicando la regla de L'Hopital.

Para la segunda parte del ejercicio, es inmediato que la función  $f(x) = x e^{-x}$  es tanto positiva como continua en  $(1, +\infty)$ . Además, es decreciente allí ya que  $f'(x) = (1 - x) e^{-x} < 0$  cuando  $x > 1$ .

Luego podemos aplicar el *Test de la integral* para deducir que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n}$  converge o diverge

simultáneamente con la integral  $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$ , es decir, que es convergente.

22. Compruebe que la serie  $p$ -armónica

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad p \in \mathbb{R},$$

converge si y sólo si  $p > 1$ , usando el Criterio de la integral.

SOLUCIÓN. Cuando  $p \leq 0$ , el término general de la serie no tiene a cero y, por tanto, la serie diverge. Por tanto, sólo nos interesa considerar el caso  $p > 0$ .

Cuando  $p > 0$ , la función  $f(x) = \frac{1}{x^p}$  es continua, positiva y decreciente en  $[1, +\infty)$  ya que el denominador es una función creciente y el numerador es constante. Por tanto, podemos aplicar el *Criterio de la integral*, que nos dice que la serie en cuestión es convergente si y sólo si converge la integral impropia

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M x^{-p} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_1^M = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{M^{1-p} - 1}{1-p}.$$

Este último límite es finito si y sólo si  $1 - p < 0$ , es decir, si  $p > 1$ .

23. Use el criterio de la integral para decidir si la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$$

es convergente.

SOLUCIÓN. La función

$$f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2} = \frac{1}{x \ln^2 x}$$

es decreciente en  $(2, +\infty)$  ya que el denominador es una función creciente y el numerador es constante. Podemos aplicar entonces el *Criterio de la integral*. Éste nos dice que la serie en cuestión es convergente si y sólo si converge la integral impropia

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx.$$

Para estudiar la convergencia de esta última integral, empezamos reemplazando la integral impropia por el límite correspondiente

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_2^A \frac{1}{x(\ln x)^2} dx.$$

A continuación observamos que el cambio de variable  $u = \ln x$  convierte la integral indefinida en

$$\int \frac{1}{x(\ln x)^2} dx = \int \frac{1}{u^2} du = -\frac{1}{u} + C = -\frac{1}{\ln x} + C$$

lo cual, volviendo a la integral impropia, nos da

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_2^A \frac{1}{x(\ln x)^2} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} -\frac{1}{\ln x} \Big|_2^A = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln A} = \frac{1}{\ln 2} < \infty.$$

Puesto que la integral correspondiente converge, la serie también converge.