Cálculo I (Grado en Ingeniería Informática)

Problemas resueltos, 2015-16 (primera parte)

Preparado entre 2013 y 2015
por los coordinadores de la asignatura: Pablo Fernández, Luis Guijarro y Dragan Vukotić,
(con la ayuda de Kazaros Kazarian, Jaime Ortega y José Luis Torrea)

1. Demuestre *por inducción* que, para todo $n \geq 1$, se cumple la identidad

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n+1) = (n+1)^2.$$

Solución. El caso $n = 1$ nos dice que $1 + 3 = (1+1)^2$, que es claramente cierto.
Supongamos que, para un n fijo, se cumple que $1+3+5+\cdots+(2n+1) = (n+1)^2$. Ahora consideramos el caso siguiente, es decir, sumamos un impar más. Nos gustaría obtener, para este caso, que

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n+1) + (2(n+1)+1) = ((n+1)+1)^2,$$

o sea,

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n+1) + (2n+3) = (n+2)^2.$$

Veámoslo:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n+1) + (2n+3) \overset{\text{hip. inducción}}{=} (n+1)^2 + (2n+3) = n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2.$$

Según el Principio de Inducción, se sigue que

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n+1) = (n+1)^2$$

para todo n natural.

(Observe que el enunciado nos proporciona una fórmula sencilla y útil para sumar los primeros $n+1$ números impares.)

2. Pruebe que para todo $n \geq 1$ se cumple la identidad

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1.$$

Solución. Probaremos esta afirmación, $A(n)$, por inducción.
En el caso $n = 1$, la afirmación $A(1)$ se reduce simplemente a la igualdad $1 \cdot 1! = (1+1)! - 1$, lo cual es cierto.
Supongamos que, para cierto $n \in \mathbb{N}$, se cumple $A(n)$, es decir: $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$.
Hemos de demostrar que entonces se cumple $A(n+1)$:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n! + (n+1) \cdot (n+1)! = (n+2)! - 1.$$

Para comprobar esta igualdad, desarrollamos el lado izquierdo y a después usamos la hipótesis inductiva:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n! + (n+1) \cdot (n+1)! &\overset{\text{hip. ind.}}{=} (n+1)! - 1 + (n+1) \cdot (n+1)! \\ &= (n+1)![(n+1)+1] - 1 \\ &= (n+2)! - 1. \end{aligned}$$

3. Demuéstrese *por inducción* que, para todo $n \in \mathbb{N}$, el número $N(n) = n^3 + 5n$ es divisible por 6.

SOLUCIÓN. Obviamente, $N(1) = 6$ es divisible entre 6. Supongamos ahora que, para cierto $n \in \mathbb{N}$, el número $N(n)$ es divisible por 6. Veamos que 6 también es un divisor del número $N(n+1)$. Desarrollando el cubo y agrupando los términos de forma conveniente, obtenemos:

$$\begin{aligned} N(n+1) &= (n+1)^3 + 5(n+1) = (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + 5n + 5 \\ &= (n^3 + 5n) + (3n^2 + 3n) + 6 = N(n) + 3n(n+1) + 6\,. \end{aligned}$$

Obsérvese que n y $n+1$ son dos números naturales consecutivos y, por tanto, uno de ellos es par, luego el número $n(n+1)$ es par y, por tanto, $3n(n+1)$ es divisible por $2 \cdot 3 = 6$. Se sigue que nuestro número $N(n+1)$ es la suma de tres números divisibles entre 6, a saber, $N(n)$ (por hipótesis inductiva), $3n(n+1)$ y 6, luego también es divisible por 6. Esto completa la prueba por inducción.

4. Demuestre *por inducción* que, para todo $n \geq 5$, se cumple la desigualdad $2^n > n^2 + 1$.

SOLUCIÓN. Obsérvese que la afirmación es falsa para $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.
La desigualdad se cumple para $n = 5$ ya que $2^5 = 32 > 26 = 5^2 + 1$. Supongamos que es cierta para un $n \geq 5$ y veamos que también lo es para $n+1$. Por la hipótesis inductiva, obtenemos que

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2(n^2 + 1)\,.$$

Si supiésemos que $2(n^2 + 1) \geq (n+1)^2 + 1$, la prueba estaría terminada. Observemos que la útima desigualdad es equivalente a $2n^2 + 2 \geq n^2 + 2n + 2$ o, lo que es lo mismo, $n^2 \geq 2n$, lo cual es obviamente cierto ya que $n \geq 5 \geq 2$. Por tanto, $2^{n+1} > (n+1)^2 + 1$, que es lo que queríamos probar. Por el Principio de Inducción Matemática, se sigue que $2^n > n^2 + 1$ para todo $n \geq 5$.

5. Pruebe que para $n \geq 2$, $\dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$.

SOLUCIÓN. El caso $n = 2$ es sencillo: la desigualdad se reduce a $\dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} > \sqrt{2}$, es decir: $\dfrac{1}{\sqrt{2}} > \sqrt{2} - 1$, lo cual es equivalente a $1 > \sqrt{2}(\sqrt{2} - 1) = 2 - \sqrt{2}$. Esta última desigualdad dice lo mismo que $\sqrt{2} > 1$, lo cual es cierto.
Supongamos que para cierto $n \geq 2$ se cumple la hipótesis inductiva: $\dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$. Para completar la inducción, ahora veremos que entonces se sigue que

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1}\,.$$

Partiendo de la hipótesis inductiva, vemos que $\dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n} + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$. así que basta demostrar que $\sqrt{n} + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1}$. Esto es equivalente a $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, lo cual es cierto ya que, racionalizando, obtenemos

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n+1}}\,.$$

6. En combinatoria se define el número $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Fijamos un $n_0 \geq 2$ natural; use inducción empezando en n_0 para demostrar que para todo $n \geq n_0$ se tiene que

$$\binom{n}{n_0} \leq (n_0+1)^n .$$

SOLUCIÓN. La desigualdad es verdad para $n = n_0$, ya que $\binom{n_0}{n_0} = 1 \leq (n_0+1)^{n_0}$.
Asumiendo que la desigualdad es cierta para un cierto $n \geq n_0$, vamos a examinarla para $n+1$:

$$\begin{aligned}\binom{n+1}{n_0} &= \frac{(n+1)!}{n_0!(n+1-n_0)!} = \frac{(n+1)n!}{n_0!(n+1-n_0)(n-n_0)!} \\ &= \frac{n+1}{n+1-n_0}\cdot\frac{n!}{n_0!(n-n_0)!} = \frac{n+1}{n+1-n_0}\cdot\binom{n}{n_0}.\end{aligned}$$

El segundo factor de la derecha es menor o igual que $(n_0+1)^n$ por inducción; necesitamos estimar el primer factor como menor que n_0+1 para obtener el $(n_0+1)^{n+1}$ deseado. Vamos a ver si es verdad:

$$\begin{aligned}\frac{n+1}{n+1-n_0} \leq n_0+1 \quad &\Leftrightarrow \quad n+1 \leq (n_0+1)(n+1-n_0) \\ &\Leftrightarrow \quad n+1 \leq n+1+n_0(n+1)-n_0^2-n_0 \\ &\Leftrightarrow \quad 0 \leq n_0 n - n_0^2 \\ &\Leftrightarrow \quad 0 \leq n - n_0\,,\end{aligned}$$

lo cual es cierto por la hipótesis $n \geq n_0$. El enunciado queda probado por inducción.

7. Demuestre que los números $3+\sqrt{7}$ y $\sqrt{3+\sqrt{7}}$ son irracionales.

SOLUCIÓN. En primer lugar, el número $\sqrt{7}$ es irracional. La prueba es completamente análoga a la vista en clase para $\sqrt{2}$; de hecho, se prueba de la misma manera que $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$ para cualquier número primo p. Si fuese $3+\sqrt{7} = q \in \mathbb{Q}$, tendríamos también que $\sqrt{7} = q-3 \in \mathbb{Q}$ (ya que la diferencia de dos números racionales también es racional), lo cual es una contradicción. Por tanto, $3+\sqrt{7} \notin \mathbb{Q}$.
Para ver que $\sqrt{3+\sqrt{7}}$ es irracional, supongamos otra vez lo contrario: $\sqrt{3+\sqrt{7}} = r \in \mathbb{Q}$. Entonces $3+\sqrt{7} = r^2 \in \mathbb{Q}$, lo cual contradice lo dicho anteriormente. Luego $\sqrt{3+\sqrt{7}} \notin \mathbb{Q}$.

8. Halle razonadamente todos los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para los que la ecuación cuadrática (en x)

$$x^2+(2a+1)x-a^2+3a = 0$$

tiene exactamente una solución real.

SOLUCIÓN. Para que la ecuación dada tenga solución real única en x, es necesario y suficiente que su discriminante sea cero:

$$\Delta = (2a+1)^2 - 4(-a^2+3a) = 8a^2 - 8a + 1 = 0\,.$$

Esta nueva ecuación cuadrática (esta vez en a) tiene como soluciones los valores

$$\frac{8 \pm \sqrt{32}}{16} = \frac{8 \pm \sqrt{16 \cdot 2}}{16} = \frac{8 \pm 4\sqrt{2}}{16} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{4}\,.$$

Por tanto, existen exactamente dos valores del parámetro a que se mencionan en el enunciado:

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \text{y} \quad \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\,.$$

9. Encuentre razonadamente todas las soluciones de la ecuación

$$x^4 - 7x^2 + 12 = 0\,.$$

SOLUCIÓN. Se trata de una *ecuación bicuadrática* ya que, después del cambio de variable $x^2 = t$, ésta se convierte en la siguiente ecuación cuadrática:

$$t^2 - 7t + 12 = 0\,.$$

Resolviendo, obtenemos que las soluciones para t son $t = 3$ y $t = 4$. Finalmente, despejamos la x de $x^2 = t$, obteniendo cuatro soluciones: $x = \pm\sqrt{3}$ y $x = \pm 2$. Las comprobaciones directas en la ecuación inicial muestran que los cuatro valores son en efecto soluciones de la ecuación.

10. Demuestre razonadamente que la desigualdad $x^2 + 5x + 8 > 0$ se cumple para todo x real.

SOLUCIÓN. Este problema se puede resolver de diversas maneras.

Solución 1. Una forma de hacerlo es completando el cuadrado, según la fórmula estándar:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2\,.$$

Tomando $y = 5/2$, observamos que para cualquier número real x se cumple que

$$\begin{aligned} x^2 + 5x + 8 &= x^2 + 2 \cdot \frac{5}{2}x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 8 \\ &= \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 8 \\ &= \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \geq \frac{7}{4} > 0\,, \end{aligned}$$

ya que el cuadrado de cualquier número real es no negativo.

Solución 2. Otra manera de llegar a la misma conclusión sería observando que la función $f(x) = x^2+5x+8$ es continua y no tiene ceros reales, luego o es siempre positiva o es siempre negativa (según el teorema de Bolzano). Puesto que $f(0) = 8$, se sigue que es siempre positiva. (La teoría relacionada con este tema se estudia en una parte posterior del curso.

11. Factorice el polinomio $x^3 + x + 2$.

SOLUCIÓN. Recordemos el *teorema de Bezout* visto en clase: si P es un polinomio no constante (con coeficientes reales), $a \in \mathbb{R}$ y $P(a) = 0$, entonces $P(x) = (x - a)Q(x)$, donde Q es un polinomio de grado menor que el de P.
En nuestro caso, $P(x) = x^3 + x + 2$ y es obvio que $P(-1) = (-1)^3 + (-1) + 2 = 0$. Por el teorema de Bezout, $P(x) = (x + 1)Q(x)$, donde Q es un polinomio cuadrático. Dividendo $P(x)$ por $x + 1$ por el método de Ruffini, vemos que $P(x) = (x + 1)(x^2 - x + 2)$.

El polinomio $x^2 - x + 2$ no se puede factorizar como $(x - a)(x - b)$ con a, $b \in \mathbb{R}$. En efecto, si eso fuera posible, este trinomio cuadrático tendría ceros reales (a saber, a y b). Pero eso es imposible, ya que es fácil ver que $x^2 - x + 2 > 0$ para todo x real, empleando el método del ejercicio anterior.

Por tanto, es imposible seguir factorizando.

12. Determine todos los valores $x \in \mathbb{R}$ para los que se cumple la desigualdad $x^3 \leq 1$.

SOLUCIÓN. De nuevo, se puede razonar de varias maneras.

Solución 1. Una forma de resolver el ejercicio consiste en ver que la función $f(x) = x^3$ es no decreciente: si $x \leq y$ entonces $x^3 \leq y^3$. Luego, si $x \leq 1$, se sigue que $x^3 \leq 1^3 = 1$; sin embargo, si $x > 1$, entonces $x^3 > 1^3 = 1$. Luego, $x^3 \leq 1$ es cierto sólo si y sólo si $x \leq 1$.

Solución 2. Otra solución consiste en ver que $x^3 \leq 1$ es equivalente a $x^3 - 1 \leq 0$ y recordar la factorización de la diferencia de dos cubos:

$$x^3 - 1 = x^3 - 1^3 = (x - 1)(x^2 + x + 1)\,.$$

El trinomio cuadrático $x^2 + x + 1$ es siempre estrictamente positivo. Eso se puede razonar igual que antes o, alternativamente, observando que tiene el coeficiente principal positivo y no tiene ceros, pues su discriminante es $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$. Por tanto, el producto de arriba es ≤ 0 si y sólo si el factor $x - 1 \leq 0$, es decir, si y sólo si $x \leq 1$.

13. Encuentre razonadamente todos los valores $x \in \mathbb{R}$ tales que $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| = 2$.

SOLUCIÓN. El valor absoluto de un número es $= 2$ si y sólo si el número o bien es $= 2$ o bien $= -2$. Por tanto, tenemos dos posibilidades:

$$\frac{x-1}{x+1} = 2\,, \qquad \frac{x-1}{x+1} = -2\,.$$

Resolviendo la primera ecuación nos da: $x - 1 = 2x + 2$, es decir, $x = -3$.
Resolviendo la segunda, obtenemos $x - 1 = -2x - 2$, luego $x = -\dfrac{1}{3}$.
Por tanto, la ecuación inicial tiene dos soluciones: $x = -3$ y $x = -\dfrac{1}{3}$.

14. Determine razonadamente todos los valores $x \in \mathbb{R}$ para los que se cumple la siguiente desigualdad: $|x - 1| + |x + 1| < 4$.

SOLUCIÓN. Como el valor absoluto de un número depende de si el número es positivo o negativo, conviene considerar el signo de cada cantidad que aparece en la ecuación.
La expresión $x-1$ cambia de signo en el punto $x=1$ mientras que $x+1$ lo hace en $x=-1$. Por tanto, debemos considerar por separado los casos $x<-1$, $-1\le x<1$ y $x\ge 1$.

Cuando $x<-1$, tenemos que $x+1<0$ y $x-1<0$. Por tanto, $|x-1|+|x+1|=-(x-1)-(x+1)=-2x$. Esto es <4 si y sólo si $x>-2$. Por tanto, los $x\in(-2,-1)$ cumplen la desigualdad.

Cuando $-1\le x<1$, tenemos que $x+1\ge 0$ y $x-1<0$. Por tanto, $|x-1|+|x+1|=-(x-1)+(x+1)=2$. Esto es <4 siempre, así que la desigualdad se cumple para todo $x\in[-1,1)$.

Cuando $x\ge 1$, tenemos que $x+1>0$ y $x-1\ge 0$. Por tanto, $|x-1|+|x+1|=(x-1)+(x+1)=2x$. Esto es <4 si y sólo si $x<2$. Por tanto, los $x\in[1,2)$ cumplen la desigualdad.

Resumiendo las conclusiones obtenidas, la desigualdad se cumple para los números x tales que

$$x\in(-2,-1)\cup[-1,1)\cup[1,2)=(-2,2)\,.$$

15. Encuentre razonadamente todos los valores $x\in\mathbb{R}$ para los que se satisface la siguiente desigualdad: $|x^2+2x+1|\le 4$.

SOLUCIÓN. Este problema se puede resolver de muchas maneras.

Solución 1. Observemos que la expresión dentro del valor absoluto es un cuadrado. Y entonces

$$|x^2+2x+1|\le 4 \quad\Longleftrightarrow\quad |(x+1)^2|\le 4 \quad\Longleftrightarrow\quad (x+1)^2\le 4 \quad\Longleftrightarrow\quad |x+1|\le 2,$$

(conviene recordar que $\sqrt{(x+1)^2}=|x+1|$), que finalmente nos dice que $-2\le x+1\le 2$, es decir, que $-3\le x\le 1$.

Solución 2. Podemos escribir que

$$|x^2+2x+1|\le 4 \quad\Longleftrightarrow\quad -4\le x^2+2x+1\le 4$$

y determinar los valores de x que verifican, simultáneamente,

$$x^2+2x-3\le 0 \qquad \text{y} \qquad x^2+2x+5\ge 0\,.$$

Empleando los métodos ya vistos, es fácil comprobar que la segunda desigualdad se cumple para todo x, mientras que la primera nos da el rango $x\in[-3,1]$.

Solución 3. También podemos decidir cuándo x^2+2x+1 es positivo y negativo. Como es siempre positivo,

$$|x^2+2x+1|\le 4 \quad\Longleftrightarrow\quad x^2+2x+1\le 4 \quad\Longleftrightarrow\quad x^2+2x-5\le 0,$$

que nos vuelve a dar el rango $x\in[-3,1]$.
En realidad, las tres estrategias son (casi) lo mismo.

16. Encuentre razonadamente todos los valores $x\in\mathbb{R}$ para los que se cumple la desigualdad

$$|x^2-4x+4|\le 25\,.$$

SOLUCIÓN. El problema se puede hacer de varias maneras. Aquí indicaremos la más simple:

$x^2 - 4x + 4$ es un cuadrado perfecto, lo que simplifica bastante los cálculos. De hecho,

$$x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 \implies |x^2 - 4x + 4| = |(x-2)^2| = |x-2|^2\,,$$

por lo que

$$\begin{aligned} |x^2 - 4x + 4| \le 25 \quad &\iff \quad |x-2|^2 \le 25 \\ &\iff \quad |x-2| \le 5 \\ &\iff \quad -5 \le x-2 \le 5 \\ &\iff \quad -3 \le x \le 7\,. \end{aligned}$$

Alternativamente, podemos razonar que el conjunto dado por la desigualdad $|x-2| \le 5$ es un intervalo cerrado (por el $\le$) de centro 2 y de radio 5; por tanto el conjunto pedido es el intervalo

$$[2-5, 2+5] = [-3, 7]\,.$$

17. Encuentre razonadamente todos los valores $x \in \mathbb{R}$ tales que $|x+2| \le |x+3|$.

SOLUCIÓN. Debido a la propiedad básica $|t| \le c \iff -c \le t \le c$ (para $c > 0$), nuestra desigualdad es equivalente a la siguiente:

$$-|x+3| \le x+2 \le |x+3|\,.$$

Podemos resolver esta doble desigualdad distinguiendo entre dos casos.
En el caso $x \ge -3$, tenemos que $|x+3| = x+3$ y nuestra doble desigualdad se convierte en

$$-(x+3) \le x+2 \le x+3\,.$$

La primera desigualdad es cierta cuando $x \ge -\dfrac{5}{2}$ mientras que la segunda es cierta siempre. Por tanto, cualquier $x \in [-\dfrac{5}{2}, +\infty)$ es una solución.
En el caso $x < -3$, obtenemos $|x+3| = -(x+3) = -x-3$ y, por tanto, nuestra doble desigualdad se convierte en

$$x+3 \le x+2 \le -x-3\,.$$

La primera desigualdad es falsa para todo x así que, en este caso, la doble desigualdad es imposible.
En resumen, las soluciones son los números x tales que $x \ge -\dfrac{5}{2}$.

18. Use la propiedad de Arquímedes:

para todo $x \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \ge x$,

para demostrar que $\inf \left\{ \dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} = 0$.

Solución. Primero vamos a comprobar que si $\varepsilon > 0$ entonces existe un número natural n_ε tal que $\dfrac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$. Esta afirmación es una consecuencia inmediata de la propiedad de Arquímedes, puesto que si tomamos $a = \dfrac{1}{\varepsilon}$ entonces, según la propiedad de Arquímedes, existe $n_a \in \mathbb{N}$ tal que $a < n_a$. De aquí obtenemos que $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{n_a}$. Por la definición de a tenemos que $\dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$. Entonces, si tomamos $n_\varepsilon = n_a$, obtenemos que $\dfrac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$, que es lo que teníamos que comprobar.

Para demostrar que $\inf \left\{ \dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} = 0$ tenemos que comprobar que $\forall \varepsilon > 0$ existe un número $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$, lo que es cierto según la afirmación demostrada más arriba.

19. Sea A el conjunto de números reales definido como

$$A = \left\{ 2+n, 2+\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

(Obsérvese que es un conjunto con infinitos elementos.) Halle (si existen) su supremo y su ínfimo, y decida si A tiene un máximo o un mínimo.

Solución. Intuitivamente, como n puede tomar cualquier valor entero positivo, los valores $2+n$ crecen tanto como se desee; esto quiere decir que A no admite ninguna cota superior y por tanto no existe el supremo ni el máximo de A.

Para escribir una prueba formal, podemos usar de nuevo la propiedad de Arquímedes: *para todo* $x \in \mathbb{R}$, *existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $n \geq x$. En efecto, para cualquier número real dado, M, existe un número $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq M - 2$ y, por tanto, $n + 2 \geq M$.

Por otra parte, como n es siempre positivo, ambos n y $1/n$ también lo son, lo cual implica que

$$2 + n \geq 2, \quad 2 + \frac{1}{n} \geq 2\,.$$

Por tanto, el conjunto A tiene a 2 como una cota inferior. Como $1/n$ puede tomar valores tan pequeños como se quiera, se tiene que no hay ningún otro $\alpha > 2$ que pueda funcionar como cota inferior; de hecho, si $\alpha > 2$, $\alpha - 2 > 0$ y, de nuevo gracias al axioma de Arquímedes, existe un número $n \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha - 2 > \dfrac{1}{n} > 0$, luego $\alpha > 2 + \dfrac{1}{n}$. Por ello, 2 es, de hecho, el ínfimo de A.

Finalmente, para que 2 fuera el mínimo de A, 2 debería pertenecer a A. Pero si algún elemento del conjunto fuera $= 2$, entonces tendríamos que para algún $n \in \mathbb{N}$, o bien $n = 0$ o bien $1/n = 0$, lo que es imposible porque n es positivo.

20. Usando las definiciones del límite finito y del límite infinito, compruebe que:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$.

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+3} = +\infty$.

Solución. (a) Hemos de comprobar que, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ y $n \geq N$ se cumple que $\left|\dfrac{n}{2n+1} - \dfrac{1}{2}\right| < \varepsilon$. La última desigualdad dice que

$$\left|\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{(2n) - (2n+1)}{2(2n+1)}\right| = \frac{1}{2(2n+1)} < \varepsilon\,,$$

es decir, $2n + 1 > \dfrac{1}{2\varepsilon}$, es decir, $n > \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2\varepsilon} - 1\right)$. Por tanto, basta con elegir un número natural N tal que $N > \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2\varepsilon} - 1\right)$; éste existe, por el axioma de Arquímedes. Entonces obviamente tendremos que para todo $n \geq N$ se cumple también que $n > \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2\varepsilon} - 1\right)$ y, por tanto (revirtiendo los pasos)se cumplirá $\left|\dfrac{n}{2n+1} - \dfrac{1}{2}\right| < \varepsilon$.

(b) Según la definición del límite infinito, hemos de demostrar que, dado $M > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ y $n \geq N$ se cumple que $\sqrt{n+3} \geq M$. La última desigualdad es equivalente a $n + 3 \geq M^2$, es decir, $n \geq M^2 - 3$. Por tanto, basta elegir un número natural N tal que $N \geq M^2 - 3$ (que, de nuevo, existe debido al axioma de Arquímedes). Entonces para todo $n \geq N$ se seguirá que también $n \geq M^2 - 3$ y, por tanto, $\sqrt{n+3} \geq M$.

21. En clase comentamos que la sucesión $(\cos n)_{n=1}^{\infty}$ es oscilante (es decir, es divergente pero no es de las sucesiones divergentes que tienden a $+\infty$ o a $-\infty$). Demuestre formalmente que es divergente.

Solución. Supongamos lo contrario: que existe $\lim\limits_{n\to\infty} \cos n = L \in \mathbb{R}$. Como toda subsucesión de una sucesión convergente también converge al mismo límite, tendremos entonces que también

$$\lim_{n\to\infty} \cos 2n = \lim_{n\to\infty} \cos(n+1) = \lim_{n\to\infty} \cos(n-1) = L\,.$$

Es justo esta observación lo que nos ayudará a llegar a una contradicción. Usando las fórmulas trigonométricas para el coseno de la suma y de la diferencia, obtenemos que

$$\cos(n+1) = \cos n \operatorname{sen} 1 - \operatorname{sen} n \cos 1\,, \qquad \cos(n-1) = \cos n \operatorname{sen} 1 + \operatorname{sen} n \cos 1\,.$$

Sumando ambas fórmulas, vemos que $\cos(n+1) + \cos(n-1) = 2\cos n \operatorname{sen} 1$. Tomando límites cuando $n \to \infty$ de ambos lados de esta igualdad, se sigue que $2L = 2L \operatorname{sen} 1$. Por tanto, o bien $L = 0$ o bien podemos cancelar L en la ecuación, obteniendo $\operatorname{sen} 1 = 1$. Puesto que $\operatorname{sen} 1 \neq 1$ (recordemos que $\operatorname{sen} x = 1$ sólo cuando $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$), concluimos que $L = 0$.
Para llegar a la contradicción deseada, finalmente consideremos la fórmula

$$\cos(2n) = \cos^2 n - \operatorname{sen}^2 n = \cos^2 n - (1 - \cos^2 n) = 2\cos^2 n - 1\,.$$

Pasando al límite cuando $n \to \infty$, obtenemos que $L = 2L^2 - 1$. Como ya hemos establecido que $L = 0$, se sigue que $0 = -1$, lo cual es absurdo.
Se sigue que la hipótesis inicial sobre la existencia del límite era falsa y que, por tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} \cos n$ no existe.

22. Calcule el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^4 - 2n^3 + 41}{\pi n^4 + en^2 + \sqrt{2}n}\,,$$

SOLUCIÓN. Dado que estamos considerando el cociente de dos polinomios del mismo grado, podemos usar el truco habitual de dividir el numerador y el denominador por la potencia más grande de n que aparece en el denominador, que es n^4, obteniendo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^4 - 2n^3 + 41}{\pi n^4 + en^2 + \sqrt{2}n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 - \frac{2}{n} + \frac{41}{n^4}}{\pi + \frac{e}{n^2} + \frac{\sqrt{2}}{n^3}} = \frac{3}{\pi}\,.$$

23. Determine razonadamente el límite

$$\lim_{n\to\infty} \left(n^2\ \sqrt{n^2+3n} - n^3\right),$$

SOLUCIÓN. Se trata de una indeterminación de tipo $\infty - \infty$, con lo cual no podemos calcular el límite directamente. Usamos el procedimiento habitual de racionalizar (o de multiplicar por la expresión conjugada), basado en la fórmula estándar $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, como sigue:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \left(n^2\ \sqrt{n^2+3n} - n^3\right) &= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(n^2\ \sqrt{n^2+3n} - n^3\right)\left(n^2\ \sqrt{n^2+3n} + n^3\right)}{n^2\ \sqrt{n^2+3n} + n^3} \\ = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4\ (n^2+3n) - n^6}{n^2\ \sqrt{n^2+3n} + n^3} &= \lim_{n\to\infty} \frac{3n^5}{n^2\ \sqrt{n^2+3n} + n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{\sqrt{1+3/n} + 1}\end{aligned}$$

(en el último paso hemos dividido arriba y abajo por n^3, pues el denominador es comparable con n^3). Escrito así, es inmediato comprobar que el límite es $+\infty$.

24. Calcúlese el límite

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+1})\,.$$

SOLUCIÓN. Una vez más, racionalizando el numerador, obtenemos

$$L = \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+1}) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+n+1) - (n^2+1)}{\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2+1}}\,.$$

Dividiendo por n en el numerador y en el denominador, vemos que

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{2}\,.$$

25. Calcule razonadamente el siguiente límite: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}$.

SOLUCIÓN. Conviene recordar que si $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ entonces también $\lim_{n\to\infty} a_{n-1} = L$. En particular,

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = e\,.$$

Ahora ya resulta fácil calcular el límite dado, usando unas sencillas manipulaciones:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n-1)+1}{n-1}\right)^{n-1} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = e\,.$$

26. Calcule razonadamente el valor del límite $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n}$.

Solución. Para este ejercicio, es fundamental recordar el límite básico

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e\,.$$

El término general de la sucesión, $a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n}$, cumple

$$\frac{1}{a_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} = \left((1+\frac{1}{n})^n\right)^2 \to e^2\,, \quad n\to\infty\,.$$

Por tanto, $a_n \to \frac{1}{e^2}$, $n\to\infty$.

27. Calcúlese razonadamente el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{2(n+1)}.$$

Solución. Si intentamos ver cómo queda el límite calculando simplemente límites de cada parte de la expresión, obtendremos una indeterminación del tipo 1^∞, ya que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} = 1, \quad \text{y} \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty.$$

Para resolver la indeterminación, el camino más sencillo es reconocer el límite asociado al número e; en otras palabras,

$$\frac{n+2}{n+1} = \frac{(n+1)+1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}\,,$$

con lo que el límite pedido queda como

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{2(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{2(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)}\right)^2 = e^2\,.$$

28. Dada la sucesión a_n mediante la fórmula $a_{n+1} = n\cdot a_n$, donde $a_1 = 1$, demuestre que para todo $n\geq 4$ se tiene que $a_n \geq n$.

Solución. El problema pide demostrar que $a_n \geq n$ para $n\geq 4$; para hacerlo usando el principio de inducción, habrá que empezar ésta en $n=4$. Calculendo los primeros términos de la sucesión vemos que

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 6.$$

Observamos que $a_4 \geq 4$, lo que da el inicio de la inducción. Asumimos ahora que $a_n \geq n$ y examinamos a_{n+1}:

$$a_{n+1} = n\cdot a_n \geq n\cdot n = n^2,$$

donde hemos usado la hipótesis de inducción para obtener la desigualdad. Como $n\geq 1$, multiplicando por n positivo en ambos lados obtenemos que $n^2 > n$; como n^2 es un entero se debe tener de hecho que $n^2 \geq n+1$. Por lo tanto $a_{n+1} \geq n+1$ que es lo que queríamos demostrar. El enunciado se sigue ahora del principio de inducción.

29. La sucesión (a_n) viene dada por la siguiente fórmula recurrente:

$$a_1 = 1\,, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{n} + 1\,, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

(a) Demuestre *por inducción* que $\dfrac{n}{n-1} \leq a_n \leq 2$ para todo $n \geq 2$.

(b) Deduzca que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 0$.

Solución. Tomamos como proposición $\mathcal{P}(n)$ la desigualdad a demostrar, es decir, $\dfrac{n}{n-1} \leq a_n \leq 2$.

- El caso $\mathcal{P}(2)$ es inmediato, ya que $a_2 = 2$, y $\dfrac{2}{2-1} = 2 \leq a_2 = 2 \leq 2$.
- Asumimos ahora que $\mathcal{P}(n)$ es verdad y procedemos a demostrar $\mathcal{P}(n+1)$ en dos pasos:
    - primero observamos que $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{n} + 1 \leq \dfrac{2}{n} + 1 \leq 1 + 1 = 2$, ya que al ser $n \geq 2$ se tiene que $\dfrac{2}{n} \leq 1$;
    - por otra parte,

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{n} + 1 \geq \frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)}{n} + 1 = \frac{1}{n-1} + 1 = \frac{n}{n-1}\,;$$

esto no es exactamente lo que queríamos demostrar (que era $a_{n+1} \geq \dfrac{n+1}{n}$), pero es fácil observar que

$$\frac{n}{n-1} \geq \frac{n+1}{n}, \quad \text{ya que } n^2 > (n+1)(n-1) = n^2 - 1.$$

Por lo tanto,

$$a_{n+1} \geq \frac{n}{n-1} \geq \frac{n+1}{n}$$

que era lo que queríamos demostrar.

Una vez conocido el apartado anterior del problema, este límite es una aplicación sencilla del teorema del encaje (o del sandwich):

Como $\dfrac{n}{n-1} \leq a_n \leq 2$ para todo $n \geq 2$, dividiendo por n toda la desigualdad, se obtiene que

$$\frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)}{n} \leq \frac{a_n}{n} \leq \frac{2}{n},$$

o que

$$\frac{1}{n-1} \leq \frac{a_n}{n} \leq \frac{2}{n}.$$

Como los límites a derecha e izquierda coinciden y son cero, el límite de $\dfrac{a_n}{n}$ también debe ser cero.

30. La sucesión (a_n) viene dada por la siguiente fórmula recurrente:

$$a_1 = \frac{1}{2}\,, \qquad a_{n+1} = 2a_n - \frac{1}{4} \quad \text{para cada } n \geq 1.$$

(a) Demuestre *por inducción* que $a_n > \frac{1}{4}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) Pruebe que la sucesión es creciente.

SOLUCIÓN. (a) Es obvio que $a_1 > 1/4$.
Supongamos que, para un n fijo, resulta que $a_n > 1/4$. El siguiente término de la sucesión, a_{n+1}, viene dado por

$$a_{n+1} = 2a_n - \frac{1}{4},$$

y como $a_n > 1/4$, resulta que

$$a_{n+1} > 2 \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4},$$

que es lo que queríamos probar.
Según el Principio de Inducción, se sigue que $a_n > 1/4$ para todo n natural.

(b) Queremos probar que $a_{n+1} > a_n$ para todo n. Pero como $a_{n+1} = 2a_n - 1/4$, es lo mismo que exigir que

$$2a_n - \frac{1}{4} > a_n \quad \Longleftrightarrow \quad a_n > \frac{1}{4}\,,$$

que ya sabemos que es cierto, por el apartado anterior.

31. Decida si la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} e^{n+2}}{\pi^n}$$

converge o diverge. Si procede, calcule la suma de la serie.

SOLUCIÓN. Observemos que nuestra serie es geométrica con razón $q = -e/\pi$, ya que el cociente de cada dos términos sucesivos es

$$\frac{\dfrac{(-1)^{n+2} e^{n+3}}{\pi^{n+1}}}{\dfrac{(-1)^{n+1} e^{n+2}}{\pi^n}} = -\frac{e}{\pi}\,.$$

Además,

$$\left| -\frac{e}{\pi} \right| = \frac{e}{\pi} < \frac{e}{3} < 1\,,$$

con lo cual la serie converge. Según la fórmula para la suma de una serie geométrica:

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}\,, \qquad |q| < 1\,,$$

la suma en este caso ($a = e^2$, $q = -e/\pi$) es

$$\frac{e^2}{1 + \dfrac{e}{\pi}} = \frac{\pi e^2}{\pi + e}\,.$$

32. (a) Razone si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$$

converge o diverge. Justifique su respuesta.

(b) Decida razonadamente si converge o no la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)\,\log(n+1)}\,.$$

SOLUCIÓN. (a) Observemos que $\dfrac{1}{n(n+2)}$ se puede descomponer en **fracciones simples** como sigue:

$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(n+2)-n}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)\,.$$

Esto nos permite ver que nuestra serie tiene sumas parciales *telescópicas* (la mayoría de los términos aparecen dos veces, la segunda vez tres lugares después de la primera aparición y con el signo opuesto):

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\Bigg((1-\frac{1}{3}) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{4}) + (\frac{1}{3}-\frac{1}{5}) + (\frac{1}{4}-\frac{1}{6}) + +(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}) \\
&\quad + \ldots + (\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}) + (\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}) + (\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2})\Bigg) \\
&= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right) \to \frac{3}{2}, \quad n\to\infty\,.
\end{aligned}$$

Por consiguiente, la serie converge y su suma es igual a $3/2$.

(b) Puesto que para todo $n \geq 2$ se cumple que $\log(n+1) \geq \log 3 > \log e = 1$, se sigue que

$$0 < \frac{1}{n(n+2)\,\log(n+1)} \leq \frac{1}{n(n+2)}\,, \qquad n \geq 2\,.$$

El apartado (a) y el criterio de comparación nos dicen que la serie converge.

33. Estudie la convergencia de la serie infinita

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^2+1}\,,$$

justificando la respuesta.

SOLUCIÓN. Podemos aplicar el *Criterio del término general*: la serie diverge porque su término general no tiende a 0. De hecho,

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^2+1}$$

no existe: la sucesión es oscilante ya que $\frac{n^2}{n^2+1}$ converge a 1, mientras que $(-1)^n$ alterna su valor entre 1 y -1.

34. Estudie la convergencia de la serie infinita

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n! + \sqrt{3}}\,.$$

Solución. Conviene observar que

$$n! + \sqrt{3} > n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n \geq (n-1)n$$

y, por tanto,

$$0 < \frac{1}{n!+1} < \frac{1}{(n-1)n}\,, \qquad n \geq 2\,.$$

La serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n}$ se ha visto en clase en algunos grupos: es *telescópica* y convergente, con suma uno. Alternativamente, puede verse que es convergente aplicando el *Criterio asintótico* ya que

$$\frac{1}{(n-1)n} \sim \frac{1}{n^2}\,, \qquad n \to \infty\,.$$

(Esta última afirmación se comprueba dividiendo los términos y viendo que el cociente, $n/(n-1) \to 1$, cuando $n \to \infty$.)
Finalmente, aplicando el *Criterio de comparación*, concluimos que la serie inicial converge.

35. Demuestre que si $a_n > 0$, entonces la serie $\sum_n \left(\frac{2a_n}{3a_n+2}\right)^n$ converge.

Solución. Es fácil ver que

$$\frac{2a_n}{3a_n+2} \leq \frac{2}{3} \Leftrightarrow 6a_n \leq 6a_n + 4\,,$$

lo cual es cierto. Por tanto, la serie se puede comparar con la geométrica $\sum_n \left(\frac{2}{3}\right)^n$ y ésta converge por ser su razón $q = 2/3 \in (-1, 1)$.

36. Decida si la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{n+2}$$

converge o diverge, justificando adecuadamente la respuesta.

Solución. Observa que es una serie de términos positivos. El término general de la serie,

$$a_n = \tfrac{\sqrt{n}+1}{n+2} \to 0\,, \qquad n \to \infty\,,$$

como es necesario para la (hipotética) convergencia (pero no es suficiente). Además, es asintóticamente equivalente a $1/\sqrt{n}$, como se comprueba fácilmente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\sqrt{n}+1}{n+2}}{\dfrac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)}{n+2} = 1.$$

Aplicando el *Criterio asintótico* y recordando que $\sum_n \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge (siendo ésta una serie p-armónica con $p = 1/2 < 1$), deducimos que la serie del enunciado también diverge.

37. Decida razonadamente si la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+n+3}$$

converge o diverge.

Solución. Argumentamos como en el caso de la serie anterior, pero ahora la comparación (asintótica) correcta es con $1/n^{3/2}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\sqrt{n}}{n^2+n+3}}{\dfrac{1}{n^{3/2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/2}\, n^{1/2}}{n^2+n+3} = 1.$$

Aplicando el *Criterio asintótico* y recordando que $\sum_n \frac{1}{n^{3/2}}$ converge, deducimos que la serie del enunciado también converge.

38. Estudie razonadamente la convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{4^n}.$$

Si usa algún criterio específico, nómbrelo y explique cómo se ha aplicado.

Solución. La potencia n-ésima en el término general de la serie sugiere usar el criterio de la raíz.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{4^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^2}}{4} = \frac{1}{4},$$

donde hemos usado que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, y que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n}^{\,2}\right) = \left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\right)^2 = 1^2 = 1.$$

Como $\dfrac{1}{4} < 1$, el criterio de la raíz asegura que la serie converge.

39. Estudie razonadamente la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{n+2}}{2^n(\log n)^n}$.

Solución. El término general contiene varias potencias. Podemos aplicar el *Criterio de la raíz*:

$$\sqrt[n]{\frac{e^{n+2}}{2^n(\log n)^n}} = \frac{e^{\frac{n+2}{n}}}{2\log n} = \frac{e^{1+\frac{2}{n}}}{2\log n} \to 0\,, \qquad n\to\infty\,,$$

puesto que el numerador tiende a e y el denominador tiende al infinito. Puesto que el límite es menor que uno, la serie converge.

40. Decida razonadamente si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n\cdot(n!)^2}{(2n)!}$$

converge o diverge. Nombre o enuncie el criterio utilizado.

SOLUCIÓN. La serie es positiva, siendo su término general $a_n = \dfrac{7^n \cdot (n!)^2}{(2n)!}$. Puesto que aparecen factoriales, es conveniente aplicar el test del cociente.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{7^{n+1}\cdot((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}}{\dfrac{(2n)!}{7^n\cdot(n!)^2}} = \frac{\dfrac{7^{n+1}\cdot((n+1)\cdot n!)^2}{(2n+2)!}}{\dfrac{(2n)!}{7^n\cdot(n!)^2}} = \frac{7(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} \to \frac{7}{4}\,, \quad n\to\infty\,.$$

Al ser el límite mayor que uno, la serie diverge según el *Criterio del cociente*.

41. Decida la convergencia condicional o absoluta (o, en su caso, la divergencia) de la serie infinita

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n!+2n)}{n^3}\,.$$

SOLUCIÓN. La serie asociada con valores absolutos converge por el *Criterio de comparación* ya que

$$0 \le \left|\frac{\operatorname{sen}(n!+2n)}{n^3}\right| \le \frac{1}{n^3}$$

y la serie 3-armónica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ converge (visto en clase). Por tanto, la serie original converge absolutamente.

42. Determínese si la serie infinita

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n+2013}}$$

diverge, converge absolutamente o converge condicionalmente, justificando la respuesta.

SOLUCIÓN. Se trata de una serie alternada. No converge absolutamente porque

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n+2013}}\right| = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2013}}$$

diverge, por comparación asintótica con la serie $\sum_n 1/\sqrt{n}$ (que ya sabemos que diverge).
Por otra parte, es fácil comprobar que $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+2013}}$ es una sucesión decreciente de números positivos y tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, justo las hipótesis con las que el *criterio de Leibniz* nos permite concluir que la serie converge.
Conclusión: la serie en el enunciado converge condicionalmente.

43. Decida si la serie alternada

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n\sqrt{n}-1}{n^3+1}$$

converge absoluta o condicionalmente o diverge.

Justifique adecuadamente su respuesta, nombrando o enunciando los criterios aplicados.

Solución. Esta serie tiene términos positivos y negativos (de hecho, es alternada, a partir del tercer término), lo que permite varios tipos de convergencia. Mirando lo que se obtiene cuando quitamos el signo al término general de la serie, observamos que es

$$\frac{n\sqrt{n}-1}{n^3+1} \geq 0,$$

lo cual, cuando n es muy grande, se asemeja mucho a $\dfrac{n\sqrt{n}}{n^3}$. Tras simplificar, vemos que esto coincide con $\dfrac{1}{n^{3/2}}$, que es el término general de una p-serie con $p = 3/2$ y por tanto convergente. Para justificar este razonamiento heurístico, usaremos el criterio de comparación asintótica (*i.e*, comparación con límite):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n\sqrt{n}-1}{n^3+1}}{\dfrac{1}{n^{3/2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/2}(n^{3/2}-1)}{n^3+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3-n^{3/2}}{n^3+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{n^3-n^{3/2}}{n^3}}{\dfrac{n^3+1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\dfrac{1}{n^{3/2}}}{1+\dfrac{1}{n^3}} = 1$$

Como ese límite existe y es mayor que cero, el comportamiento de la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n\sqrt{n}-1}{n^3+1}$ es el mismo que el de la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$, y por tanto converge.
La serie pedida convergerá por tanto **absolutamente**.

44. Decida la convergencia condicional o absoluta (o, en su caso, la divergencia) de la serie infinita

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n-1}}.$$

Solución. La serie es alternada. Es evidente que la sucesión $\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{n-1}}\right)_{n=2}^{\infty}$ es positiva y tiende a cero. Además, cuando n crece, también crece $n-1$ y es positiva ($n \geq 2$), luego $\dfrac{1}{n-1}$ es decreciente y también la sucesión $\dfrac{1}{\sqrt[4]{n-1}}$. Por el *criterio de Leibniz*, la serie es convergente.
La serie asociada con los valores absolutos, $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n-1}}$, puede compararse con la serie $\dfrac{1}{4}$-armónica:

$$\frac{1}{n-1} \geq \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[4]{n-1}} \geq \frac{1}{\sqrt[4]{n}} = \frac{1}{n^{1/4}}.$$

Recordemos que $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n^{1/4}}$ diverge por ser $1/4 \leq 1$.
Aplicando el *Criterio de comparación*, se sigue que $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n-1}}$ diverge.
En conclusión, la serie inicial converge condicionalmente.