Comentario. Conviene recordar la siguiente fórmula, vista en clase y en todos los textos:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C\,.$$

Hay que interpretarla de manera siguiente: la fórmula es válida tanto en el intervalo $(-\infty, 0)$ como en $(0, +\infty)$ pero la constante C puede tomar diferentes valores en cada uno de los intervalos. Por ejemplo, la función

$$F(x) = \begin{cases} \ln(-x) + \pi, & \text{si } x < 0, \\ \ln x - 145, & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

también es una función primitiva de $1/x$, al igual que $\ln|x| + \pi$.

En el caso de fórmulas con varios logaritmos como, por ejemplo,

$$\frac{1}{4}\ln|x+1| + \frac{3}{4}\ln|x-3| + C$$

entenderemos que hay que interpretar la función en varios intervalos de la recta (finitos o infinitos) y con, posiblemente, diferentes valores de la constante C en cada uno de ellos. En este caso concreto, se trata de los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 3)$ y $(3, +\infty)$.

---

1. Respuestas finales o sugerencias:

a) $\ln|\operatorname{sen} x| + C$, donde C es una constante arbitraria.

b) $e^{\sqrt{x^2+3}} + C, \quad C \in \mathbb{R}$.

c) Obsérvese que

$$\frac{2x+1}{x^4+2x^3+x^2+1} = \frac{2x+1}{(x^2+x)^2+1}\,.$$

Aplicando el cambio de variable: $t = x^2 + x$, con $dt = (2x+1)\,dx$, se obtiene

$$\int \frac{2x+1}{x^4+2x^3+x^2+1}\,dx = \int \frac{2x+1}{(x^2+x)^2+1}\,dx = \int \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arc\,tg}(x^2+x) + C\,.$$

2. Respuestas finales:

a) $\displaystyle\int (x^2+3x)\Big(5x^3 - \frac{8}{x^3}\Big)\,dx = \frac{5}{6}\,x^6 + 3x^5 + \frac{24}{x} - 8\,\ln|x| + C$

b) $\displaystyle\int \Big(e^x(e^x - e^{-x}) + \frac{1}{5x-2}\Big)\,dx = \frac{1}{2}\,e^{2x} - x + \frac{1}{5}\,\ln|5x-2| + C$

c) $\displaystyle\int \Big(3\operatorname{sen}(5x) - \frac{x}{2} - \frac{5}{1+4x^2}\Big)\,dx = -\frac{3}{5}\,\cos(5x) - \frac{1}{4}\,x^2 - \frac{5}{2}\,\arctan(2x) + C$

d) $\displaystyle\int \Big(\frac{x}{1+x^2} + \frac{2}{(4x+1)^2} + \frac{4}{\sqrt{1-2x^2}}\Big)\,dx = \frac{1}{2}\,\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}\,\frac{1}{4x+1} + 2\sqrt{2}\operatorname{arc\,sen}(\sqrt{2}x) + C$

3. Soluciones:

$$
\begin{aligned}
&a) \int x\cos(5x)\,dx = \frac{1}{25}\cos(5x) + \frac{1}{5}\,x\,\mathrm{sen}(5x) + C \\
&b) \int e^{-x}\,\mathrm{sen}\,x\,dx = -\frac{e^{-x}}{2}\big(\cos x + \mathrm{sen}\,x\big) + C \\
&c) \int (x^2-2x)e^{-5x+3}\,dx = (-25x^2+40x+8)\,\frac{e^{-5x+3}}{125} + C \\
&d) \int x\sqrt{x+1}\,dx = \frac{2}{5}\,(x+1)^{5/2} - \frac{2}{3}\,(x+1)^{3/2} + C\,.
\end{aligned}
$$

Sugerencia para el apartado (c): integrar por partes dos veces.
Sugerencia para el apartado (d): integrar por partes, con $u = x$, $dv = \sqrt{x+1}\,dx$.

4. Idea: por ejemplo, observamos que

$$\mathrm{sen}^7 x = \mathrm{sen}\,x \cdot \mathrm{sen}^6 x = \mathrm{sen}\,x \cdot (\mathrm{sen}^2 x)^3 = \mathrm{sen}\,x\,(1-\cos^2 x)^3\,,$$

desarrollamos el cubo y aplicamos el cambio de variable $\cos x = t$, $-\mathrm{sen}\,x\,dx = dt$.

Respuestas:

a) $\int \mathrm{sen}^3 x\,dx = -\cos x + \dfrac{\cos^3 x}{3} + C.$

b) $\int \mathrm{sen}^7 x\,dx = -\cos x + \cos^3 x - \dfrac{3}{5}\cos^5 x + \dfrac{\cos^7 x}{7} + C.$

c) $\int \mathrm{sen}^5 x\cos^3 x\,dx = \dfrac{\mathrm{sen}^6 x}{6} - \dfrac{\mathrm{sen}^8 x}{8} + C.$

5. Soluciones:

$$
\begin{aligned}
&a) \int \frac{x}{(x+1)(x-3)}\,dx = \frac{1}{4}\ln|x+1| + \frac{3}{4}\ln|x-3| + C \\
&b) \int \frac{x^3+1}{x^3+x}\,dx = x + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \arctan x + C \\
&c) \int \frac{2}{(x-1)(x+3)^2}\,dx = \frac{1}{8}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\,\frac{1}{x+3} - \frac{1}{8}\ln|x+3| + C \\
&d) \int \frac{5x^2+5}{(x^2-1)(x^2+2x+2)}\,dx \\
&= \ln|x-1| - 5\ln|x+1| + 2\ln(x^2+2x+2) + 3\arctan(x+1) + C
\end{aligned}
$$

6. Soluciones finales:

$$
\begin{aligned}
&a) \int_0^{\pi/4} \mathrm{tg}\,x\,dx = \frac{1}{2}\ln 2 &\qquad& b) \int_0^{\pi/4} \cos^4 x\,dx = \frac{1}{4} + \frac{3}{32}\pi \\
&c) \int_0^{\pi/4} \mathrm{tg}^2 x\,dx = 1 - \frac{\pi}{4} && d) \int_0^{\pi/4} \mathrm{sen}^5 x\cos^3 x\,dx = \frac{5}{384}
\end{aligned}
$$

7. El último apartado se incluye sólo a título informativo para quienes quieran realizar un estudio individual más detallado. La función indicada es la arco tangente hiperbólica, la inversa de la función tangente hiperbólica.

$$
\begin{array}{ll}
a) & \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^x+4e^{-x}}\,dx = \frac{1}{2}\big(\arctan(e/2)-\arctan(1/2)\big) \\
b) & \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}\,dx = \frac{2}{3}\,(1+e)^{3/2} - 2\sqrt{1+e} + \frac{2}{3}\sqrt{2} \\
c) & \displaystyle\int_0^1 \frac{4^x+1}{2^x+1}\,dx = \frac{1}{\ln 2}\big(-2\,\ln 3 + 3\,\ln 2 + 1\big) \\
d) & \displaystyle\int_0^1 \quad \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}\,dx = \frac{1}{2}\,\operatorname{arctanh}(\sqrt{2}/2)
\end{array}
$$

8. a) 16, b) $3\pi - 6$.

9. a) $\dfrac{\pi-1}{2}$, b) $3-e$.

10. $\dfrac{2}{3}$.

11. $\dfrac{21}{4}\sqrt{2}$.

12. πab.

13. (a) $f'(x) = (1+x^2)^{-2}$, (b) $f'(x) = \dfrac{2x+1}{(1+(x^2+x)^2)^3} = \dfrac{2x+1}{(x^4+2x^3+x^2+1)^3}$,
(c) $f'(x) = \dfrac{2x}{(1+x^4)^4} - \dfrac{e^x}{(1+e^{2x})^4}$.

14. (a) $\int_0^\infty e^{-5x}\,dx = \frac{e}{3}$, b) $\int_0^1 \ln x\,dx = -1$, c) $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = +\infty$,
d) $\int_1^\infty \dfrac{dx}{x^2(x^2+1)} = \int_1^\infty \dfrac{dx}{x^2} - \int_1^\infty \dfrac{dx}{x^2+1} = 1 - \dfrac{\pi}{4}$.

15. Respuestas:
a) Converge; b) diverge; c) converge.