CÁLCULO DE PRIMITIVAS (INTEGRALES INDEFINIDAS)

1. Calcule las siguientes primitivas, aplicando el cambio de variable apropiado:

$$a)\ \int \operatorname{ctg} x\, dx\,, \qquad b)\ \int e^{\sqrt{x^2+3}} \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}\, dx\,, \qquad c)\ \int \frac{2x+1}{x^4+2x^3+x^2+1}\, dx\,.$$

2. Calcule las siguientes funciones primitivas:

$$a)\ \int (x^2+3x)\Big(5x^3-\frac{8}{x^3}\Big)\, dx \qquad b)\ \int \Big(e^x(e^x-e^{-x})+\frac{1}{5x-2}\Big)\, dx$$

$$c)\ \int \Big(3\operatorname{sen}(5x)-\frac{x}{2}-\frac{5}{1+4x^2}\Big)\, dx \qquad d)\ \int \Big(\frac{x}{1+x^2}+\frac{2}{(4x+1)^2}+\frac{4}{\sqrt{1-2x^2}}\Big)\, dx$$

(Nota: pueden usarse las fórmulas $\int \frac{1}{x^2+a^2}\, dx = \frac{1}{a}\arctan(x/a)+C$; $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin(x/a)+C$).

3. Calcule las siguientes primitivas (integrando por partes):

$$a)\ \int x\cos(5x)\, dx\,, \quad b)\ \int e^{-x}\operatorname{sen} x\, dx\,, \quad c)\ \int (x^2-2x)e^{-5x+3}\, dx\,, \quad d)\ \int x\sqrt{x+1}\, dx\,.$$

4. Usando la fórmula $\operatorname{sen}^2 x = 1-\cos^2 x$, calcule las siguientes integrales:

$$\int \operatorname{sen}^3 x\ dx\,, \qquad \int \operatorname{sen}^7 x\, dx\,, \qquad \int \operatorname{sen}^5 x\cos^3 x\ dx\,.$$

5. Calcule las siguientes primitivas (usando el método de las fracciones simples):

$$\int \frac{x}{(x+1)(x-3)}\, dx, \quad \int \frac{x^3+1}{x^3+x}\, dx, \quad \int \frac{2}{(x-1)(x+3)^2}\, dx, \quad \int \frac{5x^2+5}{(x^2-1)(x^2+2x+2)}\, dx.$$

INTEGRALES DEFINIDAS. CÁLCULO A TRAVÉS DE PRIMITIVAS

6. Calcule $\int_0^{\pi/4} f(x)\, dx$, con $f(x)$ igual a:

$$a)\ \operatorname{tg} x \qquad b)\ \cos^4 x \qquad c)\ \operatorname{tg}^2 x \qquad d)\ \operatorname{sen}^5 x\cos^3 x$$

7. Calcule $\int_0^1 f(x)\, dx$, con $f(x)$ igual a:

$$a)\ \frac{1}{e^x+4e^{-x}}\,, \qquad b)\ \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}\,, \qquad c)\ \frac{4^x+1}{2^x+1}\,, \qquad d)\ \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}\,.$$

(Nota: puede usar la fórmula $\int dx/\sqrt{x^2+1} = \ln\big(x+\sqrt{x^2+1}\big)+K$).

8. Calcule el área de la región limitada por

a) el eje X y la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen} x$ en el intervalo $[0, 8\pi]$;

b) el intervalo $[0, \pi]$ del eje X y la gráfica de la función $f(x) = \lfloor x \rfloor$ (la función "parte entera", o "suelo").

9. Halle el área de la región limitada por las gráficas de los pares de funciones que se indican:

$$\begin{aligned} &a)\ f(x) = \frac{2}{4x^2+1} \qquad \text{y} \qquad g(x) = 2|x|, \\ &b)\ f(x) = x\big(e^x + 1\big) \qquad \text{y} \qquad g(x) = x + x^2 e^x, \end{aligned}$$

10. Dada $f(x) = x^2 - 2x + 7$, consideremos el triángulo curvilíneo T limitado entre las tangentes en $x = 0$ y $x = 2$ y la gráfica de f. Halle el área de T.

11. Halle el área de la región acotada por la curva $y^2 = 3x$ y la recta $2y - 2x + 3 = 0$.

12. Dados $a, b > 0$, calcule el área de la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

SEGUNDO TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

13. Halle $F'(x)$ si

$$a)\ F(x) = \int_0^x (1+t^2)^{-2}\, dt, \quad b)\ F(x) = \int_0^{x^2+x} (1+t^2)^{-3}\, dt, \quad c)\ F(x) = \int_{e^x}^{x^2} (1+t^2)^{-4}\, dt\,.$$

14. Definamos la función F mediante la fórmula

$$F(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2}\, dt\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

(a) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los puntos de máximo y mínimo de la función F.

(b) Determine los intervalos de convexidad y concavidad de F y los puntos de inflexión.

INTEGRALES IMPROPIAS. CRITERIO DE LA INTEGRAL

15. Calcule las siguientes integrales impropias:

$$a)\ \int_0^\infty e^{-3x+1}\, dx\,, \qquad b)\ \int_0^1 \ln x\, dx\,, \qquad c)\ \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos^2 x}\, dx\,, \qquad d)\ \int_1^\infty \frac{dx}{x^2(x^2+1)}\,.$$

16. Estudie la convergencia de las siguientes series mediante el criterio de la integral:

$$a)\ \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2+1}, \qquad b)\ \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n \ln n}, \qquad c)\ \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n \ln^2 n},$$