

APLICACIÓN DE TEOREMAS SOBRE DERIVADAS

1. Dada la función $f(x) = \sqrt{2x(1-x)}$, hállese un valor $c \in (0, 1)$ tal que $f'(c) = 0$.
2. ¿Existe una función f diferenciable, con $f(1) = 4$, $f(5) = 7$ y $f'(x) \geq 1$ para todo x ?
3. Use el teorema del valor medio de Lagrange para demostrar que $|\arctan a - \arctan b| \leq |a - b|$.
4. Usando primero el teorema de Bolzano y después el teorema de Rolle, demuestre que cada una de las ecuaciones

$$x^5 + 14x + 31 = 0 \quad \text{y} \quad 3x - 2 + \cos \frac{\pi}{2}x = 0$$

tiene exactamente una raíz real.

5. Calcule el número exacto de soluciones reales de cada una de las siguientes ecuaciones:

$$a) 2x - 1 = \sin x, \quad b) x = \arctan x, \quad c) (x + 2)^{1/4} - x^{1/4} = 1.$$

Indicación: Por el Teorema de Rolle, si f' no se anula en un intervalo, entonces $f(x) = 0$ no puede tener dos soluciones en dicho intervalo. Recuerde también el Teorema de Bolzano.

6. Sea f es una función dos veces derivable tal que la ecuación $f(x) = 0$ tiene, al menos, tres soluciones en $[a, b]$. Usando el teorema de Rolle, pruebe que existe $c \in (a, b)$ tal que $f''(c) = 0$.

LA REGLA DE L'HOPITAL

7. Calcule los siguientes límites:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{e^x - 1}, \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(6x))}{\ln(\cos(3x))}, \quad (c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos(\pi x)}{x^2 - 2x + 1}, \quad (d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2015x^3 + 2014x - 2013}{e^x}.$$

8. Halle los siguientes límites:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \ln(1+x)}{x^2}, \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x}, \quad (c) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{1/x}, \quad a, b > 0.$$

SOBRE MÁXIMOS/MÍNIMOS

9. Calcule los valores máximo y mínimo de la función $f(x) = 2x - 3x^{2/3}$ en el intervalo $[-1, 3]$.
10. El número de individuos de una población (en miles) viene dado por

$$N(t) = 1 + (3 - t)^2 e^{-t}, \quad \text{con } t \geq 0, \quad t = \text{tiempo que transcurre (en años)}.$$

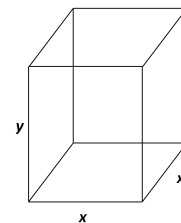
¿Cuándo la población alcanza su valor máximo? ¿Cuál será la población a largo plazo?

11. Pruebe que, de entre todos los rectángulos de igual perímetro, el de mayor área es el cuadrado.

12. Determine los puntos de la curva $y = 4 - x^2$ que están *lo más cerca* posible del punto $P = (0, 2)$.

(Sugerencia: Sitúe el punto P en el plano y esboce la curva $y = 4 - x^2$.)

13. Una empresa recibe el encargo de construir cajas con forma de paralelepípedo de modo que la base sea un cuadrado. El material que se usa para la base y la tapa superior tiene un coste de 2 euros por m^2 , mientras que el material utilizado para las paredes laterales tiene un coste de 8 euros por m^2 . Además, el volumen de las cajas debe ser $0.25 m^3$. ¿Cuáles deben de ser las dimensiones de la caja para tener un coste mínimo?



ANÁLISIS DE GRÁFICAS DE FUNCIONES

14. Halle los intervalos de crecimiento/decrecimiento y de concavidad/convexidad de:

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$; b) $f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 3$; c) $f(x) = x + \frac{1}{x}$; d) $f(x) = \arctg(2x) - x$.

15. Esboce la gráfica de las siguientes funciones:

a) $f(x) = e^{1/x}$, b) $f(x) = x + 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$, c) $f(x) = x \ln x$.

d) $f(x) = 4x + x^{\frac{7}{2}}$; e) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x > 0 \\ -x^2 + 2x + 1, & \text{si } x \leq 0, \end{cases}$; f) $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Para ello, tendrá que determinar los valores en los que las funciones están definidas, son continuas, derivables, etc. Luego, con la información de f' y f'' , determine intervalos de crecimiento/decrecimiento, concavidad/convexidad, extremos locales (o relativos), puntos de inflexión, etc. Recuerde calcular, cuando sea necesario, los límites en los extremos de los dominios.

16. Dibuje la gráfica de la función: a) $f(x) = x^2 e^{-x}$; b) $f(x) = x^2 + 2|x| + 1$.

SOBRE POLINOMIOS Y SERIES DE TAYLOR

17. Halle los polinomios de Taylor de grados 1 y 2 para $f(x) = \sqrt{x}$ en $a = 16$ y estime sin calculadora el error cometido al utilizarlos como aproximación de $\sqrt{16.2}$. Compruebe después, con ayuda de una calculadora, la precisión de dicha estimación. Con una estrategia similar, encuentre también aproximaciones sencillas de e y de $\ln 0.8$.

18. Calcule los polinomios de Taylor de grado 3 en $a = 0$ para las siguientes funciones

a) $f(x) = \ln(1 + \sin x)$, b) $f(x) = \frac{1}{3 + e^x}$, c) $f(x) = \sin\left(\frac{x}{1+x}\right)$.

19. Halle la serie de Taylor de la función $f(x) = (x^2 - 3x)e^{x^4}$ en $a = 0$ a partir de la de e^x y úsela para hallar $f^{(5)}(0)$ y $f^{(10)}(0)$.

20. Halle las series de Taylor en $a = 0$ de las siguientes funciones, indicando dónde convergen:

a) $f(x) = x \ln(1 + x^2)$, b) $f(x) = x^2 \cos(x^3)$, c) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.