Definición de derivada

1. Calcule, usando la definición, la derivada de $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ (donde exista) y $g'(0)$, donde $g(x) = \operatorname{sen} x$.

2. Decida razonadamente la diferenciabilidad en los puntos $x = 0$, $x = 2$ y $x = -1$ de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } -1 \le x \le 0, \\ e^{-x} - e, & \text{si } x < -1. \end{cases}$$

3. Supongamos que $|f(x)| \le x^2$ en cierto intervalo $(-\delta, \delta)$. Utilice la definición de derivada para calcular $f'(0)$.

4. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/x), & \text{si } x \ne 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

Usando el ejercicio anterior, compruebe que $f'(0) = 0$.

5. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}(1/x), & \text{si } x \ne 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

Compruebe, usando la definición de derivada, que f es continua pero no derivable en $x = 0$.

Cálculo de derivadas. Regla de la Cadena

6. Calcule la derivada de $f(x) = e^{-x}$ y de $g(x) = 1/(\ln x)$ usando: (a) la regla del cociente, (b) la regla de la cadena. Compruebe que los resultados obtenidos por ambos métodos coinciden.

7. Calcule las derivadas de las siguientes funciones en los puntos donde estén definidas:

a) $f(x) = \cos\left(x + \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right)$, *b)* $f(x) = \ln\left(e^{5x} + 1\right)$, *c)* $f(x) = (x + 2^x)e^x$,

d) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{64 - x^2}}$, *e)* $f(x) = \dfrac{x \ln x}{e^x + \operatorname{sen}^2 x}$, *f)* $f(x) = \sqrt{e^{1/x} + 1}$.

8. ¿Qué se obtiene: (a) al derivar tres veces la función $f\,g$; (b) al derivar dos veces la función e^f?

9. La fórmula

$$f'(x) = f(x)\big(\ln f(x)\big)'$$

se llama *derivación logarítmica* y se dice que L. Euler (matemático famoso del siglo XVIII) lo consideraba su truco favorito. Es útil para calcular $f'(x)$ sólo en los casos en que se pueden aplicar las propiedades de los logaritmos: $\log(a \cdot b) = \log a + \log b$, $\log a^b = b \log a$.

a) Use la derivación logarítmica para hallar las derivadas de

$$f(x) = (x^3 + 1)^6 (e^x + 2x)(\operatorname{sen} x - \cos x) \qquad \text{y} \qquad g(x) = (x^4 + 1)^{x^2 + x}.$$

b) Escriba una regla para derivar el producto de n funciones, $f_1(x) \cdot f_2(x) \cdots f_n(x)$.

Primeras aplicaciones de la derivada

10. Determine las rectas tangentes a las gráficas de las siguientes funciones en el punto indicado:

(a) $f(x) = \ln(e + \operatorname{sen} x)$ en $x = 0$, (b) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x$ en $x = \pi/6$.

11. ¿En qué punto corta al eje X la recta tangente a la gráfica de $f(x) = e^x$ en $x = x_0$?

12. Determine el valor del parámetro real a para que la tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 5ax$ en el origen: (a) sea horizontal; (b) tenga pendiente -10.

13. Considerando la gráfica de $f(x) = e^x$ y la recta tangente en el punto $(0, 1)$, deduzca geométricamente la desigualdad $1 + x \le e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

14. La fórmula $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^m = \dfrac{x^{m+1} - 1}{x - 1}$ se ha visto en clase. Derivando, utilícela para calcular $1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + 15 \cdot 2^{15}$.

Sobre derivadas de funciones inversas

15. Las funciones $f(x) = \operatorname{arc\,sen} x$ y $g(x) = \arccos x$ se definen en $(0, 1)$ como las inversas de las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$, respectivamente, restringidas a $(0, \pi/2)$.

a) Compruebe que $f'(x) = -g'(x) = 1/\sqrt{1 - x^2}$.

b) Empleando el hecho de que $f + g$ tiene derivada nula, halle una relación entre $\operatorname{arc\,sen} x$ y $\arccos x$.

16. La función *seno hiperbólico* viene dada por $\sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$. Llamamos arcoseno hiperbólico a su inversa. Explique por qué el arcoseno hiperbólico es derivable en todo punto y compruebe que su derivada es $1/\sqrt{x^2 + 1}$.

17. Halle una fórmula para la derivada segunda de la función inversa.

Una aplicación computacional

18. Dada $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in \mathbb{R}$, sea x_1 la intersección con el eje X de la tangente en $x = x_0$ a la gráfica de f, x_2 la intersección con el eje X de la tangente en $x = x_1$ y así sucesivamente.

a) Compruebe que la fórmula que da x_{n+1} en función de x_n es: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

b) Explique geométricamente por qué es lógico que bajo condiciones adecuadas la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converja a una solución de $f(x) = 0$.

c) Compruebe que para $f(x) = x^2 - 2$ se tiene $x_{n+1} = \frac{1}{2}\big(x_n + \frac{2}{x_n}\big)$ y, partiendo de $x_0 = 1$, observe que coinciden las primeras nueve cifras decimales de x_4 y x_5. Concluya que ese valor común se puede usar como una aproximación al número $\sqrt{2}$ con nueve cifras decimales exactas.

Nota: Este método para resolver $f(x) = 0$ se llama *método de Newton* (o de Newton–Raphson), y suele ser más rápido que el de bisección.