Funciones elementales: propiedades y gráficas

1. Para cada una de las funciones dadas abajo, halle su dominio (el conjunto más grande posible donde la función está definida).

$$f(x) = \sqrt{x^2-4}\,; \quad g(x) = \frac{x-3}{x^2-4x+3}\,; \quad h(x) = \frac{x+5}{\sqrt{x^2-4x+3}}\,; \quad u(x) = \ln(x^2-4x)\,.$$

2. Esboce las gráficas de las siguientes funciones:

$$f(x) = |x+1|-2\,; \quad g(x) = -\sqrt{x+2}\,; \quad h(x) = 2\cos x + 1\,; \quad u(x) = \cos(2x)\,; \quad v(x) = \frac{e^{-x}}{2}\,.$$

3. Para cada una de las siguientes funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, determine su imagen (recorrido o rango) y si es inyectiva o sobreyectiva (suprayectiva):

$$f(x) = |e^x-2|\,, \qquad g(x) = x^3+1\,, \qquad h(x) = \log(x^2+1)\,.$$

4. Explique razonadamente si el conjunto de todos los puntos en el plano que satisfacen la ecuación:

$$\text{(a) } y^2 = x^2\,; \qquad \text{(b) } x^2+y^2 = 1\,; \qquad \text{(c) } y^3 = x$$

es la gráfica de una función $y = f(x)$ o no.

5. Decida razonadamente si es par o impar cada una de las siguientes funciones:

$$f(x) = x^3-5x\,; \qquad g(x) = \cos(\pi x)\,; \qquad h(x) = |x^3|+5\,; \qquad u(x) = \sqrt{x^2-4}\,.$$

6. Determine, cuando sea posible, las funciones compuestas $f \circ g$ y $g \circ f$, donde

(a) $f(x) = \operatorname{sen} x\,,\ g(x) = 1-x^2\,;$ (b) $f(x) = e^{\pi x}\,,\ g(x) = \ln x\,;$ (b) $f(x) = x^2\,,\ g(x) = \sqrt{x}$

y estudie los dominios de cada composición. Conviene recordar que $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Límites de funciones

7. Compruébese formalmente (o bien utilizando las sucesiones o bien usando la definición formal con ϵ/δ):

$$\text{(a) } \lim_{x\to -4} 3x = -12\,; \qquad \text{(b) } \lim_{x\to 5} \sqrt{x-4} = 1\,.$$

8. Calcule los siguientes límites usando álgebra (en lugar de la regla de L'Hopital):

$$\text{(a) } \lim_{x\to -1} \frac{x^2+x+2}{x-1}\,; \quad \text{(b) } \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x-1}\,; \quad \text{(c) } \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}\,; \quad \text{(d) } \lim_{x\to 3} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{3}}{x-3}\,.$$

9. Estudie la existencia de los límites laterales en los puntos $x = 0$ y $x = 3$ de las funciones definidas como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x > 0, \\ -x^2, & \text{si } x \le 0, \end{cases} \quad , \quad g(x) = \begin{cases} 2e, & \text{si } x > 2, \\ e^x, & \text{si } 0 < x \le 2, \\ -x+1, & \text{si } x \le 0. \end{cases}$$

10. Estudie la continuidad en los puntos $x = 0$ y $x = 2$ de las funciones consideradas en el ejercicio anterior.

11. Para cada una de las siguientes funciones, decida razonadamente si es continua o no (en su caso, por la derecha o por la izquierda) en el punto $x = 1$:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}+5}{\sqrt{x-1}-2}, \qquad g(x) = \ln(x-1), \qquad h(x) = \sqrt[3]{x-1}.$$

12. Determine todos los puntos de continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|}\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \end{cases}$

13. Defina, cuando sea posible, el valor $f(1)$ para que f sea continua en $x = 1$:

$$\text{(a) } f(x) = \frac{x-1}{|x-1|}, \qquad \text{(b) } f(x) = \frac{(x-1)^2}{|x-1|}.$$

14. Halle todos los puntos de continuidad de la función $h(x) = \sqrt{-x^2+4x-3}$.

15. Dé un ejemplo de una función f que no es continua en ningún punto, pero tal que $|f|$ sea continua en todos los puntos.

16. Dibuje la gráfica y estudie la continuidad de las siguientes funciones. El símbolo $[x]$ denota la parte entera de x, es decir, el mayor entero menor o igual que x (la función *suelo* en Informática):

$$\text{a) } f(x) = x - [x]; \qquad \text{b) } f(x) = \sqrt{x-[x]}; \qquad \text{c) } f(x) = \left[\frac{1}{x}\right].$$

Aplicaciones del teorema de Bolzano

17. Demuestre que cada una de las siguientes funciones tiene un cero en el intervalo $[0, 1]$:

$$f(x) = -x^4 + 8x - 6; \qquad g(x) = e^{x^2} - 2; \qquad h(x) = \frac{x^2 - 3\sqrt{x} + 1}{x^3 + 6x + 1}.$$

18. Demuestre que la ecuación $\cos x - \frac{10x}{\pi} = -e$ tiene solución en el intervalo $(0, \pi/2)$.

19. Pruebe que, si $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ es continua, entonces existe al menos un valor $x_0 \in [0,1]$ que queda fijo, es decir, tal que $f(x_0) = x_0$.

20. Demuéstrese que, al calentar un aro, siempre existen dos puntos diametralmente opuestos a la misma temperatura.

Indicación: Sea $T(\alpha)$ la temperatura en función del ángulo en radianes. Considérese la función auxiliar $f(\alpha) = T(\alpha) - T(\alpha + \pi)$. ¿Qué relación hay entre $f(\alpha)$ y $f(\alpha + \pi)$?