

SUCESIONES

1. Escriba los cinco primeros términos de las sucesiones cuyos términos generales son:

$$a_n = (-1)^n + 2, \quad b_n = 2^{-n+1}, \quad c_k = \frac{k-1}{k+1}.$$

2. Halle la fórmula para a_n , sabiendo que los primeros términos de la sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ son:

(a) 1, 9, 17, 25, 33; (b) 0, 2, 0, 2, 0, 2; (c) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \frac{1}{720}$; (d) $1, -\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{8}{27}, \frac{16}{81}$.

3. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de números reales dada por la fórmula recurrente

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = x_n + 2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Demuestre por inducción que $x_n = 2n - 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

4. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de números reales dada por recurrencias

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = 2x_n + 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Demuestre por inducción que $x_n = 2^n - 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

CONVERGENCIA/DIVERGENCIA DE SUCESIONES Y LÍMITES

5. ¿Cuáles de las sucesiones cuyos términos generales vienen escritos más abajo son convergentes? Explique la respuesta usando la definición.

$$a_n = \frac{1}{2^n}; \quad b_n = \sqrt{n}; \quad c_n = 3 + (-1)^n; \quad d_n = \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

6. Compruebe que las siguientes sucesiones divergen. Estudie si tienden a $+\infty$ o $-\infty$, o si son “oscilantes”.

$$a_n = \frac{n^3}{10n^2 + 2009}; \quad b_n = -n^2; \quad c_n = \frac{1 + (-1)^n}{3 - (-1)^n}; \quad d_n = (-2)^n.$$

7. Teniendo en cuenta los límites básicos vistos en clase, halle los siguientes límites y explique la respuesta:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} 0,920131^n$; (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-7)^n}{12^{n+1}}$; (c) $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{e}{\pi}\right)^k$; (d) $\lim_{k \rightarrow \infty} e^{1/(k+1)}$.

8. Aplicando el teorema del encaje (o del sandwich) visto en clase, deduzca la existencia y halle el valor de los siguientes límites:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!}; \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cos(13n) + 15 \operatorname{sen}(n^2)}{2n + 1}; \quad (c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n+1} + 2^{-n} + \cos(n!)}{\sqrt{n}}.$$

CÁLCULO DE LÍMITES

9. Estudie si los términos generales que se indican dan lugar a sucesiones convergentes y, en caso afirmativo, halle su límite.

$$\begin{array}{lll} a) a_n = \frac{3n^4 - 2}{n^4 + 2n^2 + 2}, & b) a_n = \frac{8n^2 - 7n}{2n^3 + 5} & c) a_n = \sqrt{n^2 + 1} - n, \\ d) a_n = n\sqrt{n^2 + 1} - n^2, & e) a_n = \frac{4^n}{5^n + 6^n}, & f) a_n = \frac{6^n}{5^n + (-6)^n}, \end{array}$$

10. Determine los siguientes límites:

$$\begin{array}{lll} (a) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2n^3} & (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{\frac{3}{2}} + \pi^{-1/n} \right) & (c) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{2} e + e^{-n}) \\ (d) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n & (e) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{2n} & (f) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \right)^n \end{array}$$

(Sugerencia: para los tres últimos, conviene recordar que $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n = e$).

PROPIEDADES GENERALES DE LA CONVERGENCIA

11. En cada apartado, dé un ejemplo de una sucesión que tenga las propiedades que se afirman:

- a) La sucesión $(|a_n|)_{n=1}^{\infty}$ es monótona y acotada, pero $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ no converge.
 b) La sucesión $(b_{n+1}/b_n)_{n=1}^{\infty}$ converge, pero $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ no converge.

12. Sean a_n y b_n dos sucesiones acotadas superiormente y A y B sus respectivos supremos. Consideremos también $c_n = a_n + b_n$ y llamemos C a su supremo.

- a) ¿Se cumple siempre $A + B \geq C$?
 b) Si a_n y b_n son crecientes, ¿se cumple $A + B = C$?
 c) ¿Se cumple siempre $A + B = C$?

SUCESIONES DEFINIDAS POR RECURRENCIAS

13. La sucesión de Fibonacci, $(F_n)_{n=0}^{\infty}$, se define de forma recurrente como sigue:

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Demuestre por inducción que, para todo n natural,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

14. Consideremos la sucesión definida por $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ para cada $n \geq 1$, con $a_1 = 1$.

a) Pruebe por inducción que $a_n < 2$ para todo n .

b) Justifique que la sucesión (a_n) es monótona creciente y halle su límite.

c) Una forma alternativa de resolver los apartados anteriores es calcular una fórmula exacta para a_n . Intente hallarla.

(Este ejercicio da sentido a la expresión $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}\dots}}$, que formalmente es el resultado de iterar indefinidamente la sucesión antes indicada, y por tanto se le debe asignar el valor de su límite.)

15. Fijado $1 < t \leq 4$, consideramos la sucesión recurrente dada por

$$x_1 = 2, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{t}{x_n}\right) \quad \text{para } n \geq 1.$$

a) Pruebe que esta sucesión está acotada inferiormente por \sqrt{t} y superiormente por 2. *Indicación:* $(a+b)^2 \geq 4ab$ para $a, b \geq 0$.

b) Demuestre que es monótona decreciente. Deduzca que $\lim x_n = \sqrt{t}$.

16. Considere la sucesión $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ dada por

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2, \quad a_n = \frac{3}{2}a_{n-1} - \frac{1}{2}a_{n-2} \quad \text{para cada } n \geq 2.$$

a) Pruebe que la sucesión es creciente.

b) El apartado anterior nos dice que $a_n \geq 2$ si $n \geq 3$. Compruebe numéricamente que $a_n < 3$ para muchos valores iniciales de n y que, de hecho, 3 “parece” ser el límite de la sucesión. ¿Es fácil probar ese hecho por inducción?

b) Observe cómo se simplifica todo si nos dicen que el término general de la sucesión se puede escribir como $a_n = 3 - 1/2^{n-1}$. Compruebe primero que es así y calcule luego el límite de la sucesión.