Inducción

1. Demuestren por inducción que las siguientes fórmulas son ciertas para todo número $n \in \mathbb{N}$:

a) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.

b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots n^2 = \dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

c) $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n-1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n-1}$.

2. Demuestre por inducción:

a) que el número natural $9^{n+1} - 8n - 9$ es divisible entre 64 para todo $n \in \mathbb{N}$;

b) que el producto de n números naturales que dan el resto 1 al dividirlos por 6, tiene la misma propiedad.

3. Pruebe por inducción las siguientes afirmaciones:

a) $n^2 + 1 \geq 2n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ¿Se le ocurre otra demostración más sencilla?

b) $3^{n-1} > n^2 + 1$, para todo $n \geq 4$.

4. Suponiendo que $a > b > 0$, demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple $a^n > b^n$.

5. Demuestre la *desigualdad de Bernoulli:* $(1 + x)^n \geq 1 + nx$, para todo $x \geq -1$, $n \geq 1$.

6. Compruebe que $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$; esto nos da $\cos 2x$ como un polinomio cuadrático de $\cos x$. Demuestre que, más generalmente,

$$\cos nx = P_n(\cos x)\,, \qquad n \geq 1\,,$$

donde P_n es cierto polinomio de grado n.
(*Pista*: Aplique la fórmula para el coseno de una suma a $\cos(n+1)x$ y a $\cos(n-1)x$; intente usarlas para escribir $\cos(n+1)x$ en términos de $\cos nx$ y $\cos(n-1)x$ y aplique la variante de inducción de $n - 1$ y n a $n + 1$.)

Números reales, valores absolutos, ecuaciones y desigualdades

7. Indique los valores $x \in \mathbb{R}$ para los que se satisfacen las siguientes *igualdades*:

a) $x^2 - 10x + 21 = 0$,

b) $x^2 + 2x = 1$,

c) $x^4 - 4 = 0$,

d) $\sqrt[3]{2 + x} = 1$,

e) $\cos x - 1 = 0$,

f) $-1 + \ln \frac{x}{e} = 0$.

8. Determine razonadamente si el número $\sqrt{2} - 3$ es positivo o negativo.

9. Encuentre todos los valores $x \in \mathbb{R}$ que satisfagan las siguientes *desigualdades*:

a) $|2x+3| \leq 1$,

b) $|x-1| \leq |x+1|$,

c) $|x^2-5x+6| < 2$,

d) $|x+1| + |x+3| < 5$,

e) $\dfrac{x-2}{(x+1)(x-3)} > 0$,

f) $\dfrac{x^2-2}{x^2-4} \leq 0$,

g) $\dfrac{x^2+4}{x^2-3x} > 0$,

h) $\sqrt{x^2-6x+9} < 1$.

10. Decida si las siguientes desigualdades son válidas o no para *todos* los valores posibles de x e y que se indican a continuación:

a) $|x-y| \leq |x| + |y|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

b) $(1+x)^2 \geq 1+x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

c) $x^2 - x + 1 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

d) $x^2 - 3x + 1 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

e) $x^6 + \dfrac{1}{x^6} \geq 2$ para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Cotas superiores e inferiores. Ínfimos y supremos

11. Para cada uno de los conjuntos dados abajo, indique una cota superior y una inferior. Luego determine razonadamente el ínfimo y el supremo de cada uno de ellos. Halle también el máximo y el mínimo si existen.

a) $\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\}$,

b) $\{0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; \ldots\}$,

c) $\{\operatorname{sen} x + 1 : x \in \mathbb{R}\}$.

12. Indique si los siguientes conjuntos están acotados inferior y superiormente y, en su caso, halle el ínfimo, el supremo, el máximo y el mínimo.

a) $\{x \in \mathbb{R} : |x-3| \leq 1\}$,

b) $\{x \in \mathbb{R} : x^3 < 8\}$,

c) $\{x^2 + 6x + 9 : x \in \mathbb{R}\}$,

d) $\{(-1)^n + \dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.