Cálculo I (Grado en Ingeniería Informática) 2014-15

Convocatoria extraordinaria, junio de 2015

PUNTUACIÓN DEL EXAMEN:

P. 1	P. 2	P. 3	P. 4	P. 5	P. 6	TOTAL

Grupo: ________ Inicial del primer apellido: ________

NOMBRE: __________________________

APELLIDOS: ____

D.N.I. O PASAPORTE: _______________________________

FIRMA: ____

Notas y comentarios:

- **Todos los problemas son de desarrollo y puntúan igual (2 puntos por problema).**
- **Se pide seleccionar 5 de los 6 problemas. También hay que elegir uno a descartar, marcando una cruz (X) en la tabla de puntuación arriba en los sitios adecuados. Si no se marcan los problemas a descartar, los profesores de la asignatura elegirán el problema que no se corregirá.**
- Algunas desigualdades útiles:
$$1+x \le e^x, \qquad \ln x < x \text{ para } x>0, \qquad \operatorname{sen} x \le x \text{ para } x \ge 0;$$
- Algunas series de Taylor útiles:
$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\dots\,,\ |x|<1\,, \qquad e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots\,,\ x\in\mathbb{R}\,,$$
$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots\,,\ x\in\mathbb{R}\,, \qquad \operatorname{sen} x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots\,,\ x\in\mathbb{R}\,.$$
- Teorema de Bolzano: Sea $f(x)$ una función continua en $[a,b]$. Si $f(a)$ y $f(b)$ tienen distinto signo, entonces existe $c\in(a,b)$ tal que $f(c)=0$.
- Teorema del valor medio: Sea $f(x)$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Entonces existe $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=(f(b)-f(a))/(b-a)$. (El caso especial cuando $f(a)=f(b)$ y $f'(c)=0$ es el teorema de Rolle.)

---

1. (a) [1 punto] Decida razonadamente si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2 3^n}{n!}$ converge o diverge.

(b) [1 punto] Decida si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n}$ es covergente o divergente. Si es convergente, decida si converge absoluta o condicionalmente.

2. Tenemos la función
$$f(x) = e^{\sqrt{x^2+1}}.$$

(a) [1 punto] Calcule razonadamente la derivada $f'(x)$.

(b) [1 punto] Halle el polinomio de Taylor de orden 2 de $f(x)$ en el punto $a = 0$.

3. [2 puntos] Calcule razonadamente la integral

$$\int_0^{\pi/2} x^2 \cos x \, dx.$$

4.[2 puntos] Dibuje la gráfica de la función

$$f(x) = \ln\left(x^2 + 1\right)$$

indicando claramente sus intervalos de crecimiento/decrecimiento y concavidad/convexidad, los puntos de máximo y mínimo y los de inflexión.

5. [2 puntos] Calcule el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \operatorname{sen} t \, dt}{x^2},$$

razonando el procedimiento aplicado.

6. (a) [1 punto] Demuestre (indicando claramente todos los teoremas usados) que la función

$$f(x) = 1 + 2x + x^3 + 4x^5$$

tiene un único cero en el intervalo $[-1, 1]$.

(b) [1 punto] Encuentre razonadamente todos los valores $x \in \mathbb{R}$ para los que se cumple la desigualdad

$$|\, e^x - 2 \,| \leq 1.$$