Cálculo I

(1º de Grado en Informática, 2015-16)

Apuntes sobre series numéricas: preguntas frecuentes y ejemplos resueltos (versión revisada)

1) Preguntas frecuentes. Conceptos, teoremas y ejemplos básicos

P-1. Una serie (numérica) infinita es una suma infinita de números reales. ¿Cómo debemos entenderla? ¿En qué difiere una suma infinita de una suma finita?

Respuesta. Una suma finita de números reales como son, por ejemplo,

$$1+4^2+\pi+(-\frac{2}{e})+0,8+\sqrt{13}, \qquad \sum_{k=1}^{n} = a_1+a_2+\ldots+a_n$$

siempre existe como un número real. Conociendo los valores de los sumandos a_1, a_2,..., a_n, el valor de su suma finita se puede calcular siempre, usando las reglas básicas para operar con los números reales.

Una suma (o serie) infinita:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots,$$

formada a partir de una sucesión infinita de números reales: a_1, a_2, ... es, para empezar, tan sólo una expresión formal y es posible que no tenga significado como un valor numérico. Si lo tiene o no, depende de los valores de los números a_n. He aquí dos ejemplos de series (sumas infinitas formales):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{17}-\ldots, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+1} = \frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{10}+\frac{1}{13}+\ldots.$$

Veremos que a la primera le podemos asignar como valor un número real y a la segunda no.

Por tanto, primero tenemos que interpretar cada serie de alguna manera para darle un significado y luego decidir si se le puede asignar un valor numérico o no.

P-2. ¿Debemos distinguir entre una sucesión y una serie? ¿Cuál es exactamente la diferencia?

Respuesta. Por supuesto. Jamás debemos confundir la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con la sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Es decir, no es lo mismo la suma infinita

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\ldots$$

que la sucesión asociada

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \ldots$$

(que es un listado infinito de números reales). O sea, se trata de dos tipos de objetos muy distintos.

Los números a_n se denominan los *términos de la serie*. Los números n (que toman valores 1, 2, 3, etc.) se denominan *índices*, al igual que para las sucesiones.

P-3. ¿Qué significa decir que una serie infinita converge (es sumable) o que diverge?

Respuesta. La manera más razonable de interpretar una serie pasa por utilizar nuestros conocimientos de las sucesiones, para las que ya tenemos desarrollados los conceptos de convergencia y divergencia. En primer lugar, formamos las *sumas parciales* de la serie:

$$S_N = a_1 + a_2 + \ldots + a_N = \sum_{n=1}^{N} a_n .$$

Estas sumas son finitas y, por tanto, más fáciles de controlar. Así obtenemos una nueva sucesión $(S_N)_{N=1}^{\infty}$, siendo

$$S_1 = a_1 , \; S_2 = a_1 + a_2 , \; S_3 = a_1 + a_2 + a_3 , \; \ldots$$

Cuando N aumenta, añadimos cada vez más términos a la suma, "acercándonos" en el límite a lo que podríamos considerar como la suma infinita. Por tanto, tiene sentido preguntarse si esta sucesión $(S_N)_{N=1}^{\infty}$ tiene límite finito o no. Si lo tiene, diremos que la serie inicial $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge* (o que es *sumable*). En ese caso, la *suma de la serie* se define como el número

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n .$$

Si $\lim_{N\to\infty} S_N$ o bien no existe o bien existe como uno de los símbolos $+\infty$, $-\infty$ (recordemos: son sólo símbolos, no son números reales), diremos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es *divergente*.

No obstante, cuando $\lim_{N\to\infty} S_N = +\infty$ ó $-\infty$, es de costumbre también en esos casos decir que "la suma de la serie es $+\infty$" (ó $-\infty$).

P-4. En una serie infinita, ¿importa qué letra que se utiliza para escribir el índice?

Respuesta. Al igual que en una integral definida no importa la variable de integración (para quienes hayan visto ya la integración con anterioridad), para una serie también da lo mismo si el índice de sumación se denota n, m, k ó j, mientras la notación sea coherente y no haya confusión. Es decir, es correcto escribir:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{j=1}^{\infty} a_j , \qquad 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} .$$

No obstante, estaría mal escribir la suma anterior como, por ejemplo, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Eso significaría que $a_n = 1/k^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entendiendo que n cambia mientras que k es cierto valor fijo. Es decir, en ese caso la suma sólo se podría interpretar como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2} + \ldots ,$$

una suma divergente cuyo valor deberíamos entender como $+\infty$ (ya que las sumas parciales son crecientes y tienden al infinito).

Mencionemos da paso que, más generalmente, para una constante fija $c \neq 0$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} c = c + c + c + \ldots$$

es divergente, ya que las sumas parciales son $S_N = c + c + \ldots + c = Nc$, una cantidad que $\to +\infty$ cuando $c > 0$ y a $-\infty$ cuando $c < 0$.

Cuando $a_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (caso $c = 0$ en el ejemplo anterior), entonces es obvio que todas las sumas parciales son $S_N = 0$, luego la serie es convergente y su suma es cero, como era de esperar:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 0 = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} 0 = \lim_{N\to\infty} 0 = 0 .$$

P-5. ¿Consideramos siempre sólo sumas que empiezan desde el índice uno, como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$?

Respuesta. No. A veces nos conviene considerar las sumas como

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots , \qquad \sum_{j=3}^{\infty} a_j = a_3 + a_4 + a_5 + \dots .$$

Por ejemplo, tiene sentido considerar las series infinitas como

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \dots , \qquad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-1)(n-2)} = \frac{1}{2\cdot 1} + \frac{1}{3\cdot 2} + \frac{1}{4\cdot 3} + \dots$$

Obsérvese que, para la última serie, el término a_n ni siquiera existe cuando $n = 1$ ó $n = 2$ (pero sí existe para todos los demás índices $n \ge 3$). Eso es lo que importa: que a_n exista para todo n a partir de un índice N, ya sea a partir de $N = 4$ ó $N = 316$, por ejemplo.

Si tratamos con una serie que no empieza en $n = 1$, "ajustamos" las sumas parciales. Por ejemplo, para la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ podemos definir

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots a_N ,$$

mientras que para $\sum_{n=3}^{\infty} a_n$ podemos definir

$$S_N = \sum_{n=3}^{N} a_n = a_3 + a_4 + a_5 + \dots a_N , \qquad N \ge 3 .$$

P-6. ¿Cómo podemos saber si una serie arbitraria converge o diverge?

Respuesta. En general, no podemos. Aparte del ejemplo trivial visto arriba (con la suma de constantes), existen algunas otras series cuyas sumas parciales y sus límites pueden determinarse de forma explícita. Aprenderemos a reconocerlas. Dos ejemplos de tales series son las llamadas geométricas y telescópicas.

Para las demás series, podemos aplicar alguno de los diversos criterios de convergencia.

P-7. ¿Qué es un criterio (o test) de convergencia?

Respuesta. Es cualquier teorema que nos permite decidir si determinado tipo de series convergen o divergen. Conviene resaltar que no existe ningún criterio universal que valga para decidir la convergencia o divergencia de todas las series posibles. Cada criterio es aplicable sólo a cierta clase de series con características comunes.

P-8. ¿En qué consiste el criterio del término general para la convergencia de una serie?

Respuesta. El criterio dice lo siguiente:

Teorema (*Criterio del término general*). Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(Dicho de una manera menos formal, para que la serie converja, su término general debe ser "pequeño" en cierto sentido aunque es imposible precisar en general cómo de pequeño debe ser).

Demostración. Si la serie converge, entonces $S_n \to S$, un límite finito, cuando $n \to \infty$, luego también $S_{n-1} \to S$. Por tanto,

$$a_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n) - (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}) = S_n - S_{n-1} \to S - S = 0\,, \quad n \to \infty\,.$$

Por tanto, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y el resultado queda demostrado.

P-9. ¿En qué situaciones es útil aplicar el criterio del término general?

Respuesta. Este criterio es útil para demostrar que una serie es divergente, porque se puede formular de la siguiente manera equivalente:

Si a_n no converge a cero (o sea, o bien no tiene límite finito o bien tiene un límite finito pero éste es distinto de cero), entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

Por ejemplo, esta formulación nos permite ver inmediatamente que las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \ldots\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

son divergentes, ya que la primera tiene como $a_n = \sqrt{n}$ que diverge (porque tiende al $+\infty$ cuando $n \to \infty$) y, para la segunda, $a_n = (-1)^n$, una sucesión que, como ya sabemos, no tiene límite.

Es muy importante observar que el criterio del término general es útil sólo para establecer la divergencia. Es decir, NO se puede usar para probar la convergencia de ninguna serie.

La razón es que el criterio NO nos dice que si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Eso es falso porque existen ejemplos de series tanto convergentes como divergentes con $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Por ejemplo, es conocido para las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

que la primera converge (y su suma es exactamente $\pi^2/6$, lo cual ya requiere unas técnicas avanzadas) mientras que la segunda diverge. No obstante, en ambos casos es inmediato que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Por tanto, si los términos de una serie cumplen la condición $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, del criterio del término general no podemos deducir nada concluyente acerca de su convergencia.

P-10. ¿Qué es una suma telescópica?

Respuesta. Este término suele usarse para una serie en cuyas sumas parciales se producen muchas cancelaciones y que, por tanto, dichas sumas son fáciles de calcular. Por ejemplo, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{n+1}$$

es telescópica porque $\ln \frac{n}{n+1} = \ln n - \ln(n+1)$, luego

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \ln \frac{n}{n+1} &= \sum_{n=1}^{N} (\ln n - \ln(n+1)) \\
&= (\ln 1 - \ln 2) + (\ln 2 - \ln 3) + (\ln 3 - \ln 4) + \ldots + (\ln(N-1) - \ln N) + (\ln N - \ln(N+1)) \\
&= \ln 1 - \ln(N+1) = -\ln(N+1) \to -\infty\,, \quad N \to \infty\,.
\end{aligned}$$

Puesto que las sumas parciales no tienen límite finito, concluimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{n+1}$ es divergente.

Obsérvese que en este ejemplo no nos hubiera ayudado el criterio del término general para deducir la divergencia puesto que $n/(n+1) \to 1$ cuando $n \to \infty$ y, por tanto, $\ln \frac{n}{n+1} \to 0$ cuando $n \to \infty$, luego no podemos deducir directamente ni la convergencia ni la divergencia por dicho criterio. De ahí que hemos tenido que recurrir a otro método.

P-11. ¿Qué es una serie geométrica?

Respuesta. Es una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ donde el cociente de cada término con el anterior es fijo:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

para cierto número fijo q denominado la *razón* de la serie. Una serie geométrica siempre se puede escribir como

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots$$

donde a es su término inicial.

Por ejemplo, dada la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-\frac{1}{2})^n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \dots,$$

vemos que el cociente de cada término con el término anterior es igual exactamente a $-1/2$:

$$\frac{-\frac{1}{2}}{1} = \frac{\frac{1}{4}}{-\frac{1}{2}} = \frac{-\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{16}}{-\frac{1}{8}} = \dots = -\frac{1}{2}.$$

Para $n = 0$, tenemos $a_0 = 1$. Por tanto, la serie es geométrica con el primer término $a = 1$ y la razón $q = -1/2$.

P-12. ¿Cuándo converge una serie geométrica y cómo se calcula su suma?

Respuesta. Aunque no existe un criterio universal para todas las series posibles, para la clase de series geométricas sí existe un criterio claro que cubre todos los casos posibles. Esto se así porque las sumas parciales en este caso también se pueden calcular.

Teorema (*Criterio de convergencia para las series geométricas*). La serie $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ converge si y sólo si $|q| < 1$; es decir, si y sólo si $-1 < q < 1$. En este caso, la suma de la serie se calcula según la fórmula

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}.$$

Demostración. Ahora debemos definir las sumas parciales de la serie como

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} aq^n = a + aq + aq^2 + \dots aq^N.$$

Es fácil ver que, cuando $q = 1$, las sumas parciales son $S_N = (N+1)a$ y, por tanto, divergen, salvo en el caso $a = 0$ que no tiene ningún interés.

Cuando $q \neq 1$, observando que la multiplicación por $(1-q)$ produce muchas cancelaciones, vemos que

$$(1-q)S_N = (1-q)(a + aq + aq^2 + \dots aq^N) = a + aq + aq^2 + \dots aq^N - (aq + aq^2 + \dots aq^N + aq^{N+1}) = a - aq^{N+1}.$$

Puesto que $q \neq 1$, podemos dividir por $1-q$, concluyendo que

$$S_N = a\frac{1-q^{N+1}}{1-q}$$

Según algunos ejemplos importantes de límites (vistos antes en clase), la sucesión $(q^{N+1})_{N=1}^{\infty}$ diverge si $|q| > 1$ y también si $q = -1$; si $|q| < 1$, entonces $\lim_{N\to\infty} q^{N+1} = 0$. Esto nos lleva a la conclusión de que las sumas parciales S_N de la serie geométrica convergen si y sólo si $|q| < 1$ y que, en ese caso, su límite es

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} a\frac{1-q^{N+1}}{1-q} = \frac{a}{1-q}.$$

Un ejemplo concreto. Para la serie geométrica mencionada anteriormente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-\frac{1}{2})^n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots,$$

tenemos $q = -1/2$. Puesto que $|-1/2| = 1/2 < 1$, la serie converge y su suma es

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-\frac{1}{2})^n = \frac{1}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}.$$

P-13. ¿Hay otros ejemplos básicos de series convergentes o divergentes que nos puedan ser útiles?

Respuesta. Sí. Por ejemplo, las series de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p \in \mathbb{R}$, forman una clase extremadamente útil de ejemplos. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ se denomina *serie armónica*, así que se suele usar el nombre *serie p-armónica* para las series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

Usando o bien el criterio de la integral o el criterio de condensación, de los que aquí no hablaremos, se puede demostrar el siguiente resultado útil.

Teorema. La serie p-armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge si y sólo si $p > 1$.

Por tanto, las series como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\pi}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1,0001}}$$

son todas convergentes mientras que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-2}} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{0,9999}}$$

son divergentes.

La utilidad de estas series es enorme ya que las usamos como una escala básica de ejemplos en las aplicaciones del criterio de comparación.

P-14. ¿Qué operaciones aritméticas se pueden hacer con las series y sus sumas?

Respuesta. Al igual con los límites de sucesiones, podemos multiplicar las series convergentes por una constante y sumar dos series convergentes.

Si tenemos una serie convergente, $\sum_n a_n$, ésta se puede multiplicar por una constante $c \in \mathbb{R}$, obteniendo una nueva serie, $\sum_n (ca_n)$. Esta nueva serie es convergente y su suma se puede calcular según la siguiente regla:

$$\sum_n (ca_n) = c \sum_n a_n .$$

Esto se puede comprobar comparando las sumas parciales de las series en ambos lados de la igualdad y aplicando las reglas habituales para los límites de sucesiones:

$$\lim_{n\to\infty} (ca_1 + \dots ca_n) = c \lim_{n\to\infty} (a_1 + \dots + a_n) .$$

Así mismo, suponiendo que $c \neq 0$, si la serie $\sum_n a_n$ es divergente, también lo es $\sum_n (ca_n)$ y viceversa.

Si tenemos dos series convergentes, $\sum_n a_n$ y $\sum_n b_n$, su suma se define como la nueva serie $\sum_n (a_n + b_n)$. Esta serie también es convergente y podemos calcular su suma según la fórmula

$$\sum_n (a_n + b_n) = \sum_n a_n + \sum_n b_n .$$

¿Qué ocurre si sumamos una serie convergente, $\sum_n a_n$, y otra divergente, $\sum_n b_n$? Entonces la suma, también definida formalmente como $\sum_n (a_n + b_n)$, será una serie divergente. Eso se puede comprobar también considerando las sumas parciales.

No obstante, si sumamos dos series divergentes, especialmente si sus términos cambian de signo, es posible obtener tanto una serie convergente como divergente. Por ejemplo, si $\sum_n a_n$ diverge, sabemos que también va a ser divergente $\sum_n (-a_n)$. Sin embargo, su suma será

$$\sum_n (a_n + (-a_n)) = \sum_n 0 = 0 .$$

Por tanto, en general, no podemos hacer operaciones con series divergentes.

P-15. ¿En qué consiste el criterio de comparación y en qué situaciones es útil?

Respuesta. El enunciado es el siguiente.

Teorema (*Criterio de comparación para las series de términos positivos*). Supongamos que las sucesiones a_n, b_n cumplen la condición $0 \le a_n \le b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (o para todo $n \ge N$ para cierto N fijo).

(a) Si $\sum_n b_n$ converge, entonces $\sum_n a_n$ converge.

(b) Si $\sum_n a_n$ diverge, entonces $\sum_n b_n$ diverge.

Las conclusiones en ambos apartados son bastante lógicas, si comparamos las sumas parciales de ambas series: $a_1 + a_2 + \dots a_n \le b_1 + b_2 + \dots b_n$ y recordamos que las sumas parciales son crecientes en ambos casos, al tratarse de dos series positivas. (Esencialmente, esta es la prueba del teorema.)

Este test es útil cuando podemos comparar el término general de la serie dada con el término general de otra serie, típicamente más sencilla, cuya convergencia o divergencia ya conocemos.

Dos ejemplos concretos.

1) Sabiendo que la serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converge, podemos deducir que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + n}$ también converge. A saber, es obvio que $2^n \le 2^n + n$, luego

$$0 < \frac{1}{2^n + n} \le \frac{1}{2^n} ,$$

así que podemos aplicar el apartado (a) del criterio de comparación.

2) Recordando que la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, si observamos que

$$0 < \frac{1}{n} \leq \frac{\ln n}{n}, \quad n \geq 3$$

(puesto que $n \geq 3 > e$ implica que $\ln n > \ln e = 1$) y aplicamos el apartado (b) del criterio, concluimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ es divergente.

P-16. ¿Hay situaciones en las que el criterio de comparación no funciona?

Respuesta. Por supuesto, y son bastante frecuentes. Hablando de manera informal, si los términos de una serie son más grandes que los de una que converge, podrían ser "grandes" o "pequeños" y por tanto darnos tanto una serie divergente como convergente.

Un ejemplo concreto. Veamos qué es lo que ocurriría si en lugar de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n + n}$ tuviéramos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n - n}$. (Por cierto, conviene probar por inducción que $2^n - n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ para ver que la fracción está bien definida.) Nos gustaría compararla con la geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$ pero resulta que $2^n - n < 2^n$ para todo n, luego

$$\frac{1}{2^n - n} > \frac{1}{2^n},$$

y de ahí no podemos sacar ninguna conclusión porque no estamos en condiciones de aplicar ni el apartado a) ni el b) del test de comparación.

P-17. ¿Qué otro criterio podemos usar en esas situaciones y cuál es su enunciado exacto?

Respuesta. Cuando la comparación "falla por poco", como en el ejemplo anterior, suele ser muy efectivo el criterio asintótico de comparación. Este criterio se adapta a nuestra intuición de que, aunque $\dfrac{1}{2^n - n} > \dfrac{1}{2^n}$ (y, por tanto, no se puede aplicar el criterio de comparación habitual), los dos términos se "comportan igual" o son "bastante parecidos" cuando n se hace grande. De ahí que primero definimos el siguiente concepto.

Definición. Sean $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$ dos sucesiones de números positivos (al menos, para $n > N$, un índice fijo). Diremos que son *asintóticamente equivalentes* (o *comparables*) si existe el límite $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = L$ y $0 < L < +\infty$. **Notación**: $a_n \sim b_n$, $n \to \infty$.

(Hacemos notar que, en todo caso, al ser $a_n/b_n > 0$, se cumple $0 \leq L \leq +\infty$ obligatoriamente; sin embargo, para este criterio es fundamental excluir los casos $L = 0$ y $L + \infty$ porque no queremos que a_n sea "mucho más grande" que b_n ni tampoco al revés.)

Observemos que da igual el orden en que se divide: si $a_n/b_n \to L$ y $0 < L < +\infty$, entonces es obvio que $b_n/a_n \to 1/L$ y $0 < 1/L < +\infty$.

Un ejemplo concreto. Observemos que $\dfrac{1}{2^n - n} \sim \dfrac{1}{2^n}$, $n \to \infty$ puesto que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^n - n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n - n}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{n}{2^n}\right) = 1 \ (\neq 0, +\infty).$$

Aquí hemos usado el hecho de que $n/2^n \to 0$ cuando $n \to \infty$, algo que se puede comprobar; es "obvio" que 2^n es "mucho más grande" que n, para n grande.

Veamos ahora el enunciado de este nuevo test.

Teorema (*Criterio asintótico de comparación*). Si $a_n \sim b_n$ cuando $n \to \infty$ (siendo ambas sucesiones positivas), las series $\sum_n a_n$ y $\sum_n b_n$ convergen o divergen simultáneamente.

(A veces decimos también que las dos series son *equiconvergentes* o *comparables*.)

Según lo arriba expuesto, las series $\sum_n \frac{1}{2^n - n}$ y $\sum_n \frac{1}{2^n}$ son convergentes o divergentes a la par; puesto que la segunda es geométrica con $q = 1/2$, es convergente, luego ambas convergen.

Un ejemplo concreto. Si consideramos la serie $\sum_n \frac{1}{\sqrt{n}+1}$, es fácil comprobar (pero hay que comprobarlo haciendo la división y tomando el límite) que $\frac{1}{\sqrt{n}+1} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$, $n \to \infty$ y, puesto que la serie

$$\sum_n \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_n \frac{1}{n^{1/2}}$$

es divergente, concluimos que la serie $\sum_n \frac{1}{\sqrt{n}+1}$ también lo es. Observemos que aquí tampoco nos hubiera servido el criterio de comparación ordinario, dado que $\frac{1}{\sqrt{n}+1} < \frac{1}{\sqrt{n}}$.

P-18. ¿Qué otros criterios existen para las series de términos positivos?

Respuesta. Hay muchos pero dos son básicos y útiles, además de tener unos enunciados algo similares. Uno es el criterio de la raíz (o de Cauchy) y el otro es el del cociente (o de d'Alembert).

P-19. ¿En qué consisten los criterios de la raíz y del cociente?

Respuesta. En ambos casos, necesitamos que $a_n > 0$. Para aplicar el criterio de la raíz, consideramos el límite (si existe)

$$r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

Para el criterio del cociente, consideramos el límite (si existe)

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

En ambos casos, si $r < 1$ (está admitido el caso $r = 0$), la serie $\sum_n a_n$ converge; si $r > 1$ (está admitido el caso $r = +\infty$ también), la serie diverge.

No obstante, ninguno de los dos criterios es concluyente cuando $r = 1$. (Es decir, no lo podemos aplicar para llegar a ninguna conclusión definitiva.) La razón es que, por ejemplo, para las series habituales

$$\sum_n \frac{1}{n}, \qquad \sum_n \frac{1}{n^2}$$

el valor de los límites, en ambos casos, es $r = 1$ (ya sea con la raíz o con el cociente) y, sin embargo, una diverge y la otra converge.

P-20. ¿Cuándo conviene aplicar el criterio de la raíz y cuándo es mejor usar el criterio del cociente?

Respuesta. Si el término general de la serie contiene factoriales, en la mayoría de los casos es conveniente usar el criterio del cociente. Si a_n contiene potencias n-ésimas y polinomios de n, conviene probar con el criterio de la raíz.

Dos ejemplos concretos.

(1) Es fácil ver que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ converge (más adelante, veremos que su suma total es exactamente e) aplicando el test del cociente:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1\cdot 2\cdot \ldots n}{1\cdot 2\cdot \ldots n\cdot (n+1)} = \frac{1}{n+1} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Puesto que $r = 0$, el test del cociente nos dice que la serie converge.

(2) Para estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{n^{n/2}}{2^n}$, conviene aplicar el criterio de la raíz:

$$r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^{n/2}}{2^n}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{2} = +\infty.$$

Según el criterio de la raíz, la serie diverge.

P-21. Cuando veo una serie nueva,¿qué estrategia debo seguir para decidir su convergencia?

Respuesta. No hay un orden exacto para ir aplicando los diversos criterios, pero el siguiente podría resultar práctico. En primer lugar, vamos a suponer que se trata de una serie de términos positivos (salvo quizás un número finito de ellos).

1) Si el término general contiene factoriales, conviene empezar por el criterio del cociente. Si obtenemos $r < 1$ ó $r > 1$, ya hemos terminado.

2) Si no es así o si resulta $r = 1$ en el criterio del cociente, habrá que usar otro criterio. Conviene comprobar si acaso se trata de una suma de cierto tipo especial: geométrica o telescópica.

3) Si no es geométrica pero contiene potencias n-ésimas y polinomios de n, conviene probar también con el criterio de la raíz.

4) Si nuestra serie no es de ninguno de los tipos anteriores o si el criterio de la raíz nos da $r = 1$, conviene comprobar si el término general tiende a cero; de no ser así, sabremos que la serie es divergente.

4) Si el término general tiene límite cero, aún no podemos concluir nada. Entonces conviene ver si los términos de la serie se parecen a los de una serie relativamente sencilla (con potencias de n o similar).

5) Si vemos que los términos de la serie inicial son más pequeños que los de la serie más sencilla y resulta que ésta converge, podremos aplicar el criterio de comparación para ver que nuestra serie diverge.

Si los términos de la serie estudiada son más grandes que los de la serie con la que comparamos y ésta diverge, el criterio de comparación nos dirá que nuestra serie diverge.

6) Si no estamos en condiciones de aplicar el criterio de comparación pero los términos de la serie se parecen a los términos de otra serie (normalmente más sencilla) cuya convergencia o divergencia somos capaces de establecer, entonces conviene emplear el criterio asintótico.

P-22. ¿Cómo podemos decidir la convergencia o divergencia de series que cambian de signo (es decir, aquellas que tienen infinitos términos positivos y también infinitos términos negativos)?

Respuesta. Las estudiamos comparando la serie dada, $\sum_n a_n$, con su serie asociada con valores absolutos: $\sum_n |a_n|$. Los términos de esta nueva serie son todos no negativos (y, por tanto, puede estudiarse por los métodos anteriormente expuestos). De fundamental importancia aquí es el siguiente resultado.

Teorema Si la serie $\sum_n |a_n|$ converge, entonces también converge la serie inicial, $\sum_n a_n$.

Conviene observar que el recíproco es falso: si $\sum_n a_n$ converge, es posible que $\sum_n |a_n|$ sea divergente. No obstante, el teorema anterior puede interpretarse también de la siguiente forma: si $\sum_n a_n$ diverge, entonces también diverge $\sum_n |a_n|$.

Por tanto, para una serie general son posibles sólo los tres siguientes casos:

(1) la serie $\sum_n |a_n|$ converge (y, por tanto, también $\sum_n |a_n|$).

(2) la serie $\sum_n a_n$ converge pero $\sum_n |a_n|$ diverge;

(3) la serie $\sum_n a_n$ es divergente (y, por tanto, también diverge $\sum_n |a_n|$).

La siguiente terminología es estándar. En el caso (1), diremos que la serie $\sum_n a_n$ *converge absolutamente*. En el caso (2), diremos que $\sum_n a_n$ *converge condicionalmente*. En el caso (3), seguiremos diciendo que diverge.

Por tanto, existen tres tipos de series: las absolutamente convergentes, las condicionalmente convergentes y las divergentes. Obviamente, esto es de interés sólo para las series que cambian de signo ya que, para una serie de términos positivos siempre se cumple $|a_n| = a_n$, luego tales series siempre son o absolutamente convergentes o divergentes.

P-23. ¿Significa lo anterior que el estudio de una serie de signo variable exige más trabajo?

Respuesta. A veces, sí, porque en muchos casos tenemos que responder a dos preguntas: una sobre la convergencia de $\sum_n a_n$ y otra sobre la de $\sum_n |a_n|$.

Obviamente, si constatamos que $\sum_n |a_n|$ converge, ya sabremos qué es lo que ocurre con $\sum_n a_n$. Igualmente, si somos capaces de demostrar que $\sum_n a_n$ diverge, quedará claro que $\sum_n |a_n|$ que también diverge.

Es en el caso de una serie que condicionalmente convergente cuando más averiguaciones hay que hacer porque entonces tenemos que demostrar que $\sum_n a_n$ converge y también que $\sum_n |a_n|$ diverge.

P-24. ¿Existe alguna clasificación sistemática de las series que cambian de signo?

Respuesta. No hay ninguna categorización exacta pero con frecuencia nos encontramos con dos tipos de series de signo variable que son manejables.

Por ejemplo, muchas series que contienen expresiones de tipo seno y coseno (y otras fáciles de acotar) son manejables, por ejemplo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n!) + 2\operatorname{sen} n + e^{-n}}{n^2 + 3n + 2}.$$

Luego veremos cómo se maneja esta serie.

Otro tipo importante son las *series alternadas* como, por ejemplo,

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots, \qquad -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \dots.$$

Son series en las que los términos positivos y negativos se van alternando en un orden estricto. (Como se puede ver del segundo ejemplo, una serie puede ser geométrica y alternada a la vez.) En general, cualquier serie alternada tiene una de las siguientes dos formas:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n c_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} c_n,$$

donde $c_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, dependiendo de si empiezan por un número negativo o por un término positivo.

Conviene observar que $(-1)^{n+1} = (-1)^{n-1} \cdot (-1)^2 = (-1)^{n-1}$. Por tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} c_n$ es exactamente lo mismo que $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} c_n$.

P-25. ¿Cómo podemos decidir que una serie alternada es convergente?

Respuesta. Si podemos decidir que converge absolutamente aplicando algún método conocido, su convergencia se seguirá de forma atuomática. Pero si no podemos deducir que una serie converge absolutamente, en un gran número de situaciones podremos demostrar que es convergente aplicando el siguiente resultado.

Criterio de Leibniz: Si los números c_n cumplen las siguientes tres condiciones:
(1) $c_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
(2) la sucesión $(c_n)_n$ es decreciente;
(3) $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$,
entonces las series alternadas $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n c_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} c_n$ convergen.

(*Advertencia*: aplicando el criterio de Leibniz sólo podemos deducir que una serie converge; no nos sirve para decidir si converge absolutamente o no. Por tanto, este criterio es realmente efectivo cuando deseamos demostrar que cierta serie converge condicionalmente.)

Un ejemplo concreto. Podemos usar este criterio para ver que la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n \ln n}$ converge. En este caso, tenemos $c_n = \frac{1}{n \ln n}$. Obviamente, para $n \geq 2$ vemos que $\ln n \geq \ln 2 > \ln 1 = 0$, luego $c_n > 0$ para todo $n \geq 2$. La condición (3) también se cumple claramente, así que sólo hace falta comprobar (2). Cuando $n \nearrow$, también $\ln n \nearrow$; ambas expresiones son positivas, luego $n \ln n \nearrow$. Por lo tanto, $c_n = \frac{1}{n \ln n} \searrow$. Se cumplen las condiciones del criterio de Leibniz, así que la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n \ln n}$ converge.

P-26. Para las series que cambian de signo, ¿es fácil encontrar ejemplos de las tres situaciones: absolutamente convergente, condicionalmente convergente y divergente?

Respuesta. Sí. Veamos un ejemplo de cada.

(1) A pesar de su complicada apariencia, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n!+3)}{n^{4/3}}$ requiere poco trabajo: puesto que

$$0 \leq \left| \frac{\cos(n!+3)}{n^{4/3}} \right| \leq \frac{1}{n^{4/3}}$$

y la serie $\sum_n \frac{1}{n^{4/3}}$ converge, por el criterio de comparación podemos deducir que

$$\sum_n \left| \frac{\cos(n!+3)}{n^{4/3}} \right|$$

converge, es decir, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n!+3)}{n^{4/3}}$ *converge absolutamente*.

(2) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ es convergente debido al criterio de Leibniz, pues los valores $c_n = 1/n$ son positivos, decrecientes y tienden a cero. Sin embargo, la serie asociada de valores absolutos, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es armónica y, por tanto, divergente. Concluimos que la serie inicial, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ *converge condicionalmente*.

(3) Finalmente, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{9n+3}$ es alternada pero diverge, ya que su término general no tiende a cero.

Recordemos el siguiente detalle importante: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ si y sólo si $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ (recordemos que esto no pasa con otros valores del límite pero si con el valor cero).

Por consiguiente, $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n n}{9n+3} = 0$ sería equivalente a $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{9n+3} = 0$, lo cual es falso ya que $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{9n+3} = 1/9$. Por el *criterio del término general*, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{9n+3}$ es *divergente*.

2) Ejemplos resueltos.

E-1. Examine la convergencia de las siguientes series:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ln n\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-3}{5n+8}\,.$$

Solución. El término n-ésimo de la primera serie es $a_n = (-1)^n \ln n$. Es fácil ver que $|a_n| = \ln n \to +\infty$ cuando $n \to \infty$. Por ello es imposible que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$; de hecho, es fácil ver que no existe $\lim_{n\to\infty} a_n$ al ser la sucesión (a_n) oscilante. Por el criterio del término general para la convergencia, la serie diverge.

La situación es similar para la segunda serie. Su término general $a_n = \frac{n-3}{5n+8}$ sí tiene límite: $\lim_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{5}$ pero, como éste es distinto de cero, la serie diverge.

Obsérvese que, gracias al Criterio del término general de la serie, no hemos tenido que calcular las sumas parciales de ninguna de las dos series.

E-2. Estudie la convergencia y, si procede, determine la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{n(n+2)}$.

Solución. En este ejemplo, el término general $a_n = \dfrac{2}{n(n+2)} \to 0$, $n \to \infty$, así que no podemos deducir ni la convergencia ni la divergencia de manera inmediata. Intentaremos hacer un cálculo directo de las sumas parciales.

Usando las fracciones parciales (simples), es fácil ver que $\dfrac{2}{n(n+2)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+2}$. Usando esta representación para escribir la suma parcial N-ésima de la serie, vemos que muchos términos se cancelan, quedando sólo cuatro de ellos al final:

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right) \\ &= \left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{N-2}-\frac{1}{N}\right)+\left(\frac{1}{N-1}-\frac{1}{N+1}\right)+\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{N+2}\right) \\ &= 1+\frac{1}{2}-\frac{1}{N+1}-\frac{1}{N+2}\,. \end{aligned}$$

(Todos los demás términos se cancelan; es decir, se trata de una suma "telescópica".) Evidentemente, $S_N \to \dfrac{3}{2}$ cuando $N \to \infty$. Por tanto, la serie es convergente y su suma es igual a tres medios.

E-3. Justifique la convergencia y luego calcule la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{3^{n-1}}\,.$$

Solución. En primer lugar, se trata de una serie geométrica con el primer término $a = 4$ y de razón $q = 2/3$, luego es convergente. Esto se comprueba fácilmente dividiendo dos términos consecutivos:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{n+2}}{3^n}}{\frac{2^{n+1}}{3^{n-1}}} = \frac{2}{3}\,.$$

El primer término (obtenido sustituyendo $n = 1$) es $a = 4$, luego es fácil ver que la serie también se puede escribir como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^{n-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} 4 \left(\frac{2}{3}\right)^k .$$

Esto se puede ver también de otra manera, haciendo el cambio de índice $n - 1 = k$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^{n-1}} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 4 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k .$$

(En efecto, siendo $n - 1 = k$, se observa que cuando $n = 1$, se tiene que $k = 0$, cuando $n = 2$, $k = 1$, etc.)

Finalmente, según la fórmula para la suma de una serie geométrica,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^{n-1}} = \frac{4}{1 - \frac{2}{3}} = 12 .$$

E-4. ¿Es convergente la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \pi^{n/2} e^{-n}$? De ser así, calcule su suma.

Solución. Puesto que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pi^{n/2} e^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi}^n}{e^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{e}\right)^n$$

nuestra serie es geométrica de razón $q = \sqrt{\pi}/e$. Puesto que $q > 0 > -1$, sólo tenemos que ver que $q < 1$ para comprobar que la serie converge. Puesto que $\pi < 4$, se sigue que $\sqrt{\pi} < 2 < e$, luego $\sqrt{\pi}/e < 1$.

Solución alternativa. Incluso si no nos damos cuenta de que la serie de arriba es geométrica, podemos aplicar el criterio de la raíz para deducir que

$$r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\pi^{n/2} e^{-n}} = \lim_{n\to\infty} \pi^{1/2} e^{-1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\pi}/e < 1 .$$

y, por tanto, la serie converge.

E-5. ¿Para qué valores reales de x converge la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5x-1}{2}\right)^n$? Razone la respuesta.

Solución. Nuestra serie es *geométrica*, siendo su razón $q = (5x - 1)/2$. Por tanto, según el *criterio de convergencia para las series geométricas*, la serie converge si y sólo si $-1 < (5x - 1)/2 < 1$, es decir: $-2 < 5x - 1 < 2$. Es fácil ver que esta doble desigualdad es equivalente a $-1/5 < x < 3/5$.

E-6. ¿Es convergente o no la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n^3+1}$?

Solución. Sí. En primer lugar, es una serie de términos positivos. Segundo, conviene observar que para todo n se cumple $n^3 + 1 > n^3$, así que $\frac{1}{n^3+1} < \frac{1}{n^3}$, luego

$$0 < \frac{n}{n^3+1} < \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2} .$$

Puesto que ya sabemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente, el *criterio de comparación* nos permite deducir que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$ también es convergente.

E-7. Decida razonadamente la convergencia o divergencia de la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n-\sqrt{n}}$.

Solución. Puesto que, para $n \geq 2$, se tiene que $n > 1$, luego es $n^2 > n$ (multiplicando por n) y, por tanto, $n > \sqrt{n}$ (tomando raíces), así que tenemos la desigualdad $0 < n - \sqrt{n} < n$ para todo $n \geq 2$. Se sigue que

$$\frac{1}{n-\sqrt{n}} > \frac{1}{n}, \quad n \geq 2.$$

Puesto que la serie armónica $\sum_n \frac{1}{n}$ es divergente, el criterio de comparación nos permite concluir que $\sum_n \dfrac{1}{n-\sqrt{n}}$ también diverge.

E-8. Examine la convergencia de la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{n+7}{n^2+3\sqrt{n}+1}$.

Solución. La serie parece demasiado complicada para aplicar el test de comparación pero es apropiado y cómodo usar el criterio asintótico en este caso.

Es fácil comprobar que $n+7 \sim n$, $n \to \infty$ y también que $n^2+3\sqrt{n}+1 \sim n^2$. (¡Compruébalo por definición!) ¿Implica esto que

$$\frac{n+7}{n^2+3\sqrt{n}+1} \sim \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}, \quad n \to \infty?$$

La respuesta es: sí. A saber, es fácil ver que, cuando $a_n \sim b_n$ y $c_n \sim d_n$, $n \to \infty$ (con todos los términos positivos), entonces también $a_n/c_n \sim b_n/d_n$, $n \to \infty$; es decir, siempre podemos sustituir un término (por muy complicado que sea) por otro asintóticamente equivalente. Esto se puede comprobar también aplicando la definición de dos sucesiones asintóticamente equivalentes.

Por tanto, aplicando el test asintótico y recordando que la serie $\sum_n \frac{1}{n}$ diverge, llegamos a la conclusión de que también es divergente la serie dada en el problema.

E-9. Estudie la convergencia de la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{n}{(\ln n)^{n/4}}$.

Solución. Dado que aparecen potencias n-ésimas, probamos el criterio de la raíz:

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{n}}{(\ln n)^{1/4}}.$$

Recordemos que el numerador tiende a uno, según una fórmula vista en clase, mientras que el numerador $\to +\infty$ cuando $n \to \infty$. Por tanto, el cociente tiende a cero, o sea, $r = 0$ en este caso. Se sigue que la serie converge.

E-10. Haga lo mismo para la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^2}{2^{n^2}}$.

Solución. Debido a la presencia de los factoriales, no es muy cómodo aplicar el criterio de la raíz en este caso, así que vamos a usar el test del cociente. Para ello, evaluaremos y simplificaremos la fracción

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{((n+1)!)^2}{2^{(n+1)^2}}}{\dfrac{(n!)^2}{2^{n^2}}} = \frac{\dfrac{(n!\cdot(n+1))^2}{2^{n^2+2n+1}}}{\dfrac{(n!)^2}{2^{n^2}}} = \frac{\dfrac{(n!)^2(n+1)^2}{2^{n^2}\cdot 2^{2n+1}}}{\dfrac{(n!)^2}{2^{n^2}}} = \frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}} = \frac{n^2+2n+1}{2\cdot 4^n} \to 0, \quad n \to \infty,$$

al ser el denominador “mucho más grande” que el numerador (el numerador es asintóticamente equivalente a n^2 y el denominador, a 4^n). Según el criterio del cociente, la serie converge.

E-11. Decida si la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n!) + 2\operatorname{sen} n + e^{-n}}{n^2+3n+2}$$
converge absoluta o condicionalmente o diverge.

Solución. Puesto que $0 < e^{-n} = 1/e^n < 1$, la desigualdad triangular implica que

$$|\cos(n!) + 2\operatorname{sen} n + e^{-n}| \le |\cos(n!)| + 2|\operatorname{sen} n| + e^{-n}| < 1+2+1 = 4\,,$$

luego
$$\left|\frac{\cos(n!) + 2\operatorname{sen} n + e^{-n}}{n^2+3n+2}\right| < \frac{4}{n^2+3n+2} < \frac{4}{n^2}\,.$$
Aplicando el test de comparación, vemos que la serie dada converge absolutamente.

E-12. Lo mismo para la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2-1}}$.

Solución. En este caso, tenemos una serie alternada con $c_n = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$. Obviamente, $c_n > 0$ y $c_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Veamos que es una sucesión decreciente: cuando $n \nearrow$, es obvio que $n^2 \nearrow$ también; por tanto, $n^2-1 \nearrow$ y, como $n^2-1>0$, se sigue que $\frac{1}{n^2-1} \searrow$. Ahora ya podemos aplicar el *criterio de Leibniz* para deducir que la serie converge.

Queda por comprobar si converge absoluta o condicionalmente. Para ello, consideremos la serie asociada con valores absolutos: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$. Aplicando el criterio asintótico, es fácil ver que esta serie se comporta igual que la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$, la cual es divergente.

Conclusión: la serie inicial converge condicionalmente.

Revisado en octubre de 2015 por:
Dragan Vukotić, Coordinador de la asignatura