Cálculo I (Grado en Ingeniería Informática) 2014-15

Segundo examen parcial, diciembre de 2014 (Turno de tarde)

Tiempo: 45 minutos

SOLUCIONES

---

1. Determine razonadamente si la función

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\ln x}, & \text{si } x \geq e, \\ x^2 - ex + 1, & \text{si } x < e \end{cases}$$

es continua en el punto $x = e$.

Solución. f es una función definida a trozos: en cada uno de los intervalos $(-\infty, e)$ y $[e, +\infty)$ viene dada por una función elemental. Decir que f es continua en $x = e$ significa que existe $\lim_{x\to e} f(x)$ y es igual a $f(e)$. Vamos a comprobar que efectivamente es así.
Tomando los límites laterales, obtenemos

$$\lim_{x\to e^-} f(x) = \lim_{x\to e^-} (x^2 - ex + 1) = e^2 - e^2 + 1 = 1\,.$$

$$\lim_{x\to e^+} f(x) = \lim_{x\to e^+} \sqrt{\ln x} = \sqrt{\ln e} = \sqrt{1} = 1\,.$$

Por lo tanto, existe $\lim_{x\to e} f(x)$ y es igual a 1. Puesto que $f(e) = \sqrt{\ln e} = 1$, se sigue que f es continua en $x = e$.

---

2. Calcule <u>razonadamente</u> el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arc\,tg}(x^2)}{x^2}\,.$$

Solución. Puesto que

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{arc\,tg} x^2 = \operatorname{arc\,tg} 0 = 0 = \lim_{x\to 0} x^2\,,$$

el límite dado representa una forma indeterminada $\dfrac{0}{0}$ y podemos aplicar la regla de L'Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arc\,tg}(x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{1+(x^2)^2} \cdot 2x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x^4} = 1\,,$$

donde en el primer paso utilizamos la regla de la cadena.

3. Consideremos la función

$$f(x) = \frac{x^3 - 4\sqrt{x} + 1}{x^4 + 3x + 1} \,.$$

Demuéstrese que la función f tiene, al menos, un cero en el intervalo $(0, 1)$.

Solución. La función f es una función elemental que está definida para todo $x \geq 0$ ya que $\sqrt{x}$ está definido para esos valores y el denominador no se anula: para $0 \leq x \leq 1$ tenemos $x^4{+}3x{+}1 \geq 1 > 0$. Por lo tanto, f es continua en el intervalo $[0, 1]$.
Puesto que $f(0) = 1 > 0$ y $f(1) = -\dfrac{2}{5} < 0$, por el teorema de Bolzano se sigue que existe un valor $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = 0$.

---

4. Consideremos la función

$$f(x) = (x^2 + 2x + 1)\, e^{-x} \,.$$

Determine los puntos del intervalo $[-2, 2]$ donde la función f alcanza sus extremos absolutos. Calcule esos valores máximos y mínimos. (Conviene tener en cuenta que $2 < e < 3$.)

Solución. Puesto que la función f es el producto de un polinomio con una función exponencial, su derivada existe en todos los puntos. Por tanto, f es continua en todos los puntos $x \in \mathbb{R}$ y, en particular, en el intervalo$[-2, 2]$ que es cerrado y acotado. Por tanto, según el teorema de Weiestrass, f alcanza allí su máximo y su mínimo. Puesto que tiene derivada en todos los puntos, sólo puede alcanzar su máximo y su mínimo en uno de los extremos del intervalo $[-2, 2]$ o en uno de los puntos críticos.
Para determinar los puntos críticos, calculamos la derivada (usando la regla del producto y la regla de la cadena) y hallamos

$$f'(x) = (2x + 2)e^{-x} - e^{-x}(x^2 + 2x + 1) = (1 - x^2)e^{-x} = (1 - x)(1 + x)e^{-x} \,.$$

Puesto que e^{-x} es siempre positivo, los únicos puntos críticos de f son $x = 1$ y $x = -1$. Observemos que ambos puntos están en el intervalo $[-2, 2]$.
Comparemos ahora los valores de f en los cuatro puntos candidatos (los dos extremos del intervalo y los dos puntos críticos en él):

$$f(-2) = e^2 \,, \quad f(2) = \frac{9}{e^2} \,, \quad f(-1) = 0 \,, \quad f(1) = \frac{4}{e} \,.$$

Los tres valores $f(-2)$, $f(1)$ y $f(2)$ son todos positivos y los tenemos que comparar. Recordemos que $e > 2$ y, por tanto se sigue inmediatamente que

$$e^2 > 4 \,, \qquad \frac{9}{e^2} < \frac{9}{4} < 4 \,, \qquad \frac{4}{e} < 2 \,.$$

De aquí concluimos que el valor máximo de f es $f(-2) = e^2$ y el valor mínimo es $f(-1) = 0$.
