Cálculo I (Grado en Ingeniería Informática) 2014-15

Primer examen parcial, octubre de 2014

(Turno de tarde)

PUNTUACIÓN DEL EXAMEN:

P. 1	P. 2	P. 3	P. 4	TOTAL

Inicial del primer apellido: ________

NOMBRE: __________________________

APELLIDOS: ____

D.N.I. O PASAPORTE: _______________________________

FIRMA: ____

Notas y comentarios:

- Todos los problemas son de desarrollo. Justifique todas sus respuestas.
- Algunos límites útiles:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e\,, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n} = 0\,.$$

- Teorema sobre la convergencia de las sucesiones monótonas y acotadas (o de Bolzano-Weierstrass): Sea a_n una sucesión de números reales monótona y acotada. Entonces a_n tiene límite finito.

1. [2 puntos] Encuentre razonadamente todos los valores $x \in \mathbb{R}$ para los que se cumple que

$$|x^2 + 3x + 1| \leq 1\,.$$

Solución: Por una propiedad básica del valor absoluto, la desigualdad es equivalente a

$$-1 \leq x^2 + 3x + 1 \leq 1$$

Buscamos los x que satisfacen simultaneamente ambas desigualdades. Empezamos con la primera:

$$\begin{aligned} -1 \leq x^2 + 3x + 1 \quad &\iff \quad 0 \leq x^2 + 3x + 2 \\ &\iff \quad 0 \leq (x+1)(x+2) \\ &\iff \quad x \in (-\infty, -2] \cup [-1, +\infty)\,. \end{aligned}$$

La segunda:

$$\begin{aligned} x^2 + 3x + 1 \leq 1 \quad &\iff \quad x^2 + 3x \leq 0 \\ &\iff \quad x(x+3) \leq 0 \\ &\iff \quad x \in [-3, 0]\,. \end{aligned}$$

Los puntos que cumplen las dos desigualdades serán la intersección de ambos conjuntos (dibujo). Es decir, las soluciones de nuestra desigualdad son los siguientes números reales:

$$x \in [-3, -2] \cup [-1, 0]\,.$$

2. [2 puntos] Decídase razonadamente la existencia del siguiente límite (y, en su caso, calcúlese su valor):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n(2n+1)}\,.$$

Solución: Empezamos reescribiendo los elementos de la sucesión:

$$\begin{aligned}\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n(2n+1)} &= \frac{(n+1)^n}{n^n}\cdot\frac{n+1}{2n+1}\\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot\frac{n+1}{2n+1}\\ &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\frac{n+1}{2n+1}\,.\end{aligned}$$

Y ahora tomamos el límite, escribiéndolo como producto de dos límites finitos y conocidos:

$$\begin{aligned}\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n(2n+1)} &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\frac{n+1}{2n+1}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+1}\\ &= e\cdot\frac{1}{2}=\frac{e}{2}\,.\end{aligned}$$

3. $[3 = 1 + 1 + 1$ puntos$]$
(a) Decida si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\frac{2}{e}}$$

converge o diverge.

Solución: Hemos visto en clase que, para cualquier número $a > 0$, se tiene la fórmula

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1\,.$$

En particular, para $a = 2/e > 0$, obtenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2}{e}} = 1\,.$$

Por lo tanto, el término general $a_n = \sqrt[n]{\frac{2}{e}}$ de nuestra serie $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\frac{2}{e}}$ no tiende a cero. Según el criterio del término general, se deduce que la serie diverge.

(b) Estudie razonadamente la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}\,.$$

Si usa algún criterio específico, nómbrelo y explique cómo se ha aplicado.

Solución: Es fácil ver que

$$\frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}} \sim \frac{\sqrt[3]{n}}{n\sqrt{n}}\,, \quad n \to \infty\,,$$

ya que el cociente de los dos términos (ambos positivos) tiene límite finito y no nulo:

$$\frac{\frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}}{\frac{\sqrt[3]{n}}{n\sqrt{n}}} = \frac{n}{n+1} \to 1\,, \quad n \to \infty\,.$$

Simplificando, obtenemos

$$\frac{\sqrt[3]{n}}{n\sqrt{n}} = \frac{n^{1/3}}{n^{3/2}} = n^{1/3-3/2} = n^{2/6-9/6} = n^{-7/6} = \frac{1}{n^{7/6}}$$

Por el criterio asintótico, nuestra serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$$

se comporta como la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{7/6}}\,,$$

que es una serie p-armónica con $p = 7/6 > 1$ y que, por tanto, converge. Se sigue que la serie inicial también converge.

(c) Decida si la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi n + 8}$$
converge absoluta o condicionalmente o diverge. Justifique adecuadamente su respuesta, nombrando o enunciando los criterios aplicados.

Solución: Es una serie alternada, ya que es de la forma $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$, con $a_n = \dfrac{1}{\pi n + 8} > 0$.
Para ver su comportamiento, estudiamos primero el comportamiento de la serie asociada formada por los valores absolutos:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n + 8} \,.$$
Esta serie es divergente, como se puede ver aplicando el criterio de comparación asintótico. En efecto,
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\pi n+8}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\pi n + 8} = \frac{1}{\pi} > 0\,,$$
con lo cual sabemos que
$$\frac{1}{\pi n + 8} \sim \frac{1}{n}\,, \quad n \to \infty\,.$$
Por tanto, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n + 8}$ se comporta como la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, que es divergente por ser la serie armónica. Concluimos entonces que la serie original no converge absolutamente.

Para estudiar la convergencia condicional, comprobamos que se cumplen las tres condiciones del criterio de Leibniz:

- $a_n = \dfrac{1}{\pi n + 8} > 0$;
- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi n + 8} = 0$ claramente;
- los a_n forman una sucesión decreciente, ya que
$$\begin{aligned} a_{n+1} \le a_n \quad &\iff \quad \frac{1}{\pi(n+1)+8} \le \frac{1}{\pi n + 8} \\ &\iff \quad \pi n + 8 \le \pi(n+1) + 8 \\ &\iff \quad 0 \le \pi\,, \end{aligned}$$

  lo cual es obviamente cierto para todo $n \in \mathbb{N}$.

  Por el criterio de Leibniz, la serie converge. Como no converge absolutamente, lo hace condicionalmente.

4. [$3 = 1 + 1 + 1$ puntos] La sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ viene definida por las siguientes condiciones:

$$a_1 = 1\,, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6}\,, \quad n \geq 1\,.$$

(a) Demuestre *por inducción* que $0 < a_n < 3$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solución: Para $n \in \mathbb{N}$, sea $A(n)$ la afirmación $0 < a_n < 3$. Vamos a demostrarla por inducción.

- $A(1)$ dice que $0 < 1 < 3$, lo que es claramente verdad;
- Supongamos que $A(n)$ es verdad; es decir, que $0 < a_n < 3$ para cierto $n \in \mathbb{N}$. Queremos demostrar entonces $A(n+1)$, esto es, $0 < a_{n+1} < 3$.

  De la hipótesis inductiva: $0 < a_n < 3$ se sigue que $6 < a_n + 6 < 9$ y, por tanto, $\sqrt{6} < \sqrt{a_n + 6} < 3$. Esto claramente implica que $0 < a_{n+1} < 3$, por la fórmula que define a_{n+1}.

Por el principio de inducción, se deduce que $A(n)$ es verdad para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) Demuestre por inducción (o por otro método adecuado) que la sucesión (a_n) es creciente.

Solución 1: Es posible una prueba directa como sigue:

$$\begin{aligned} a_{n+1} > a_n \quad &\iff \quad \sqrt{a_n + 6} > a_n \\ &\iff \quad a_n^2 - a_n - 6 < 0 \\ &\iff \quad (a_n + 2)(a_n - 3) < 0\,, \end{aligned}$$

lo cual es cierto, dado que ya hemos probado en el apartado (a) que $0 < a_n < 3$ y, por tanto, $a_n + 2 > 0$ y $a_n - 3 < 0$.

Solución 2: Podemos probar por inducción que $a_{n+1} > a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Calculamos de la fórmula recurrente que $a_2 = \sqrt{7} > 1 = a_1$. Suponiendo que $a_{n+1} > a_n$, obtenemos $a_{n+1} + 6 > a_n + 6$ (y sabemos que ambas cantidades son > 0, luego podemos calcular sus raíces cuadradas). Por lo tanto, $a_{n+2} = \sqrt{a_{n+1} + 6} > \sqrt{a_n + 6} = a_{n+1}$. Esto completa la prueba por inducción.

(c) Deduzca que (a_n) es una sucesión convergente y determine su límite razonadamente.

Solución: Según los apartados (a) y (b), la sucesión (a_n) es monótona y acotada. Por el teorema indicado en la portada del examen, es convergente.
Sea $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Entonces también, como explicamos en clase, $a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$. Además, puesto que $0 < a_n < 3$ para todo n, se sigue que $0 \leq a \leq 3$.
Tomando el límite cuando $n \to \infty$ en la fórmula recurrente:

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6}\,,$$

obtenemos que $a = \sqrt{a + 6}$ y, por tanto, $a^2 = a + 6$; es decir,

$$0 = a^2 - a - 6 = (a + 2)(a - 3).$$

Las únicas soluciones de esta ecuación cuadrática son $a = -2$ y $a = 3$. Pero ya sabemos que $a \geq 0$, con lo cual descartamos la opción $a = -2$ y concluimos que $a = 3$.
