Comentario. Conviene recordar la siguiente fórmula, vista en clase y en todos los textos:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C\,.$$

Hay que interpretarla de manera siguiente: la fórmula es válida tanto en el intervalo $(-\infty, 0)$ como en $(0, +\infty)$ pero la constante C puede tomar diferentes valores en cada uno de los intervalos. Por ejemplo, la función

$$F(x) = \begin{cases} \ln(-x) + \pi, & \text{si } x < 0, \\ \ln x - 145, & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

también es una función primitiva de $1/x$, al igual que $\ln|x| + \pi$.

En el caso de fórmulas con varios logaritmos como, por ejemplo,

$$\frac{1}{4}\ln|x+1| + \frac{3}{4}\ln|x-3| + C$$

entenderemos que hay que interpretar la función en varios intervalos de la recta (finitos o infinitos) y con, posiblemente, diferentes valores de la constante C en cada uno de ellos. En este caso concreto, se trata de los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 3)$ y $(3, +\infty)$.

---

1. Respuestas finales:

a) $$\int (x^2+3x)\Big(5x^3 - \frac{8}{x^3}\Big)\,dx = \frac{5}{6}\,x^6 + 3x^5 + \frac{24}{x} - 8\,\ln|x| + C$$

b) $$\int \Big(e^x(e^x - e^{-x}) + \frac{1}{5x-2}\Big)\,dx = \frac{1}{2}\,e^{2x} - x + \frac{1}{5}\,\ln|5x-2| + C$$

c) $$\int \Big(3\,\mathrm{sen}(5x) - \frac{x}{2} - \frac{5}{1+4x^2}\Big)\,dx = -\frac{3}{5}\,\cos(5x) - \frac{1}{4}\,x^2 - \frac{5}{2}\,\arctan(2x) + C$$

d) $$\int \Big(\frac{x}{1+x^2} + \frac{2}{(4x+1)^2} + \frac{4}{\sqrt{1-2x^2}}\Big)\,dx = \frac{1}{2}\,\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}\,\frac{1}{4x+1} + 2\sqrt{2}\,\arcsin(\sqrt{2}x) + C$$

2. Soluciones:

a) $$\int (x^2-2x)e^{-5x+3}\,dx = (-25x^2+40x+8)\,\frac{e^{-5x+3}}{125} + C$$

b) $$\int x\,\cos(5x)\,dx = \frac{1}{25}\,\cos(5x) + \frac{1}{5}\,x\,\sin(5x) + C$$

c) $$\int \mathrm{sen}\,x\,e^{-x}\,dx = -\frac{e^{-x}}{2}\,\big(\cos x + \sin x\big) + C$$

d) $$\int x\sqrt{x+1}\,dx = \frac{2}{5}\,(x+1)^{5/2} - \frac{2}{3}\,(x+1)^{3/2} + C\,.$$

Sugerencia para el apartado (a): integrar por partes dos veces.
Sugerencia para el apartado (d): integrar por partes, con $u = x$, $dv = \sqrt{x+1}\,dx$.

3. Respuesta:

$$J = \int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}^7\,x\;dx = \frac{16}{35}.$$

4. Soluciones:

$$a)\ \int \frac{x}{(x+1)(x-3)}\,dx = \frac{1}{4}\ \ln|x+1| + \frac{3}{4}\ \ln|x-3| + C$$

$$b)\ \int \frac{x^3+1}{x^3+x}\,dx = x + \ln|x| - \frac{1}{2}\ \ln(1+x^2) - \arctan x + C$$

$$c)\ \int \frac{2}{(x-1)(x+3)^2}\,dx = \frac{1}{8}\ \ln|x-1| + \frac{1}{2}\,\frac{1}{x+3} - \frac{1}{8}\ \ln|x+3| + C$$

$$d)\ \int \frac{5x^2+5}{(x^2-1)(x^2+2x+2)}\,dx$$

$$= \ \ln|x-1| - 5\ \ln|x+1| + 2\ \ln(x^2+2x+2) + 3\ \arctan(x+1) + C$$

5. (a) $f'(x) = (1+x^2)^{-2}$, (b) $f'(x) = \dfrac{2x}{(1+x^4)^3}$, (c) $f'(x) = \dfrac{2x}{(1+x^4)^3} - \dfrac{3x^2}{(1+x^6)^3}$.

8. El último apartado se incluye sólo a título informativo para quienes quieran realizar un estudio individual más detallado. La función indicada es la arco tangente hiperbólica, la inversa de la función tangente hiperbólica.

$$a)\ \int_0^1 \frac{1}{e^x + 4e^{-x}}\,dx = \frac{1}{2}\,\big(\arctan(e/2) - \arctan(1/2)\big)$$

$$b)\ \int_0^1 \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}\,dx = \frac{2}{3}\,(1+e)^{3/2} - 2\,\sqrt{1+e} + \frac{2}{3}\,\sqrt{2}$$

$$c)\ \int_0^1 \frac{4^x+1}{2^x+1}\,dx = \frac{1}{\ln 2}\,\big(-2\ \ln 3 + 3\ \ln 2 + 1\big)$$

$$d)\ \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}\,dx = \frac{1}{2}\ \operatorname{arctanh}(\sqrt{2}/2)$$

9. Soluciones finales:

$$a)\ \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x\,dx = \frac{1}{2}\ \ln 2 \qquad b)\ \int_0^{\pi/4} \cos^4 x\,dx = \frac{1}{4} + \frac{3}{32}\,\pi$$

$$c)\ \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^2 x\,dx = 1 - \frac{\pi}{4} \qquad d)\ \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}^5 x \cos^3 x\,dx = \frac{5}{384}$$

10. a) 16, b) $3\pi - 6$.

11. a) $\dfrac{\pi-1}{2}$, b) $3-e$.

12. $\dfrac{2}{3}$.

13. $\dfrac{21}{4}\sqrt{2}$.

14. πab.

15. (a) $\int_0^\infty e^{-5x}\,dx = \frac{1}{5}$, b) $\int_0^1 \ln x\,dx = -1$, c) $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = +\infty$.

16. Respuestas:
a) Converge; b) diverge; c) converge.