FUNCIONES ELEMENTALES: PROPIEDADES Y GRÁFICAS

1. Para cada una de las funciones dadas abajo, halle su dominio (el conjunto más grande posible donde la función está definida).

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 9}\,; \quad g(x) = \frac{x-3}{x^2 - 4x + 3}\,; \quad F(x) = \frac{x+5}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}\,; \quad G(x) = \ln(x^2 - 4)\,.$$

2. Esboce las gráficas de las siguientes funciones:

$$f(x) = |x+2| - 3\,; \quad g(x) = -\sqrt{x-2}\,; \quad h(x) = 2\cos x + 1\,; \quad u(x) = \cos\frac{x}{2}\,, \quad v(x) = \frac{e^{-x}}{2}\,.$$

3. Para cada una de las siguientes funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, determine su imagen (recorrido o rango) y si es inyectiva o sobreyectiva (suprayectiva):

$$f(x) = |e^x - 2|\,, \qquad g(x) = x^3 + 1\,, \qquad h(x) = \log(x^2 + 1)\,.$$

4. Explique razonadamente si el conjunto de todos los puntos en el plano que satisfacen la ecuación:

$$\text{(a) } y^2 = x^2\,; \qquad \text{(b) } x^2 + y^2 = 1\,; \qquad \text{(c) } y^3 = x$$

es la gráfica de una función $y = f(x)$ o no.

5. Decida razonadamente si es par o impar cada una de las siguientes funciones:

$$f(x) = x^5 - 3x\,; \qquad g(x) = \cos(\pi x)\,; \qquad h(x) = |x^3| + 5\,; \qquad u(x) = \sqrt{x^2 - 4}\,.$$

6. Determine, cuando sea posible, las funciones compuestas $f \circ g$ y $g \circ f$, donde

(a) $f(x) = \operatorname{sen} x\,,\ g(x) = 1 - x^2\,;$ (b) $f(x) = e^{3x}\,,\ g(x) = \ln x\,;$ (b) $f(x) = x^2\,,\ g(x) = \sqrt{x}$

y estudie los dominios de cada composición. Conviene recordar que $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

LÍMITES DE FUNCIONES

7. Compruébese formalmente (o bien utilizando las sucesiones o bien usando la definición formal con ϵ y δ):

$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to -3} 2x = -6\,; \qquad \text{(b)} \quad \lim_{x\to 5} \sqrt{x-4} = 1\,.$$

8. Calcule los siguientes límites (sin usar la regla de L'Hopital, que se verá más adelante):

$$\text{(a)} \lim_{x\to -1} \frac{x^2 + x + 2}{x - 1}\,; \quad \text{(b)} \lim_{x\to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}\,; \quad \text{(c)} \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x+5} - 3}{x - 4}\,; \quad \text{(d)} \lim_{x\to 2} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}{x - 2}\,.$$

9. Estudie la existencia de los límites laterales en los puntos $x = 0$ y $x = 3$ de las funciones definidas como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x > 0, \\ -x^2, & \text{si } x \le 0, \end{cases} \quad , \quad g(x) = \begin{cases} 2e, & \text{si } x > 3, \\ e^x, & \text{si } 0 < x \le 3, \\ -x + 1, & \text{si } x \le 0. \end{cases}$$

10. Estudie la continuidad en los puntos $x = 0$ y $x = 3$ de las funciones consideradas en el ejercicio anterior.

11. Para cada una de las siguientes funciones, decida razonadamente si es continua o no (en su caso, por la derecha o por la izquierda) en el punto $x = 1$:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}+5}{\sqrt{x-1}-2}, \qquad g(x) = \ln(x-1), \qquad h(x) = \sqrt[3]{x-1}.$$

12. Determine todos los puntos de continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|}\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \end{cases}$

13. Defina, cuando sea posible, el valor $f(1)$ para que f sea continua en $x = 1$:

$$\text{(a) } f(x) = \frac{x-1}{|x-1|}, \qquad \text{(b) } f(x) = \frac{(x-1)^2}{|x-1|}.$$

14. Halle todos los puntos de continuidad de la función $h(x) = \sqrt{-x^2+7x-6}$.

15. Dé un ejemplo de una función f que no es continua en ningún punto, pero tal que $|f|$ sea continua en todos los puntos.

16. Dibuje la gráfica y estudie la continuidad de las siguientes funciones. El símbolo $[x]$ denota la parte entera de x, es decir, el mayor entero menor o igual que x (la función *suelo* en Informática):

$$\text{a) } f(x) = x - [x]; \qquad \text{b) } f(x) = \sqrt{x-[x]}; \qquad \text{c) } f(x) = \left[\frac{1}{x}\right].$$

Aplicaciones del teorema de Bolzano

17. Demuestre que cada una de las siguientes funciones tiene un cero en el intervalo $[0, 1]$:

$$f(x) = -x^4 + 8x - 6; \qquad g(x) = e^{3x^2} - 1; \qquad h(x) = \frac{x^4 - 3\sqrt{x} + 1}{x^5 + 6x + 1}.$$

18. Demuestre que la ecuación $\cos x - \frac{10x}{\pi} = -e$ tiene solución en el intervalo $(0, \pi/2)$.

19. Pruebe que, si $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ es continua, entonces existe al menos un valor $x_0 \in [0, 1]$ que queda fijo, es decir, tal que $f(x_0) = x_0$.

20. Demuéstrese que, al calentar un aro, siempre existen dos puntos diametralmente opuestos a la misma temperatura.

Indicación: Sea $T(\alpha)$ la temperatura en función del ángulo en radianes. Considérese la función auxiliar $f(\alpha) = T(\alpha) - T(\alpha + \pi)$. ¿Qué relación hay entre $f(\alpha)$ y $f(\alpha + \pi)$?