Cálculo I (Grado en Ingeniería Informática) 2013-14

Examen final, enero de 2015

PUNTUACIÓN DEL EXAMEN:

P. 1	P. 2	P. 3	P. 4	P. 5	P. 6	TOTAL

Inicial del primer apellido: ________

NOMBRE: ________________________

APELLIDOS: ____

D.N.I. O PASAPORTE: _____________________________

FIRMA: ____

Notas y comentarios:

- **Todos los problemas son de desarrollo y puntúan igual ($2,5$ puntos por problema).**
- **Se pide seleccionar 4 de los 6 problemas, al menos dos de ellos con dos apartados. También hay que elegir dos a descartar, marcando una cruz (X) en la tabla de puntuación arriba en los sitios adecuados. Si no se marcan los problemas a descartar, los profesores de la asignatura elegirán los dos problemas que no se corregirán.**
- Algunas derivadas útiles:
$$(\operatorname{tg} x)' = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}\,, \qquad (\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{1+x^2}\,.$$
- Algunas series de Taylor útiles:
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\,,\ |x| < 1\,, \qquad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\,,\ x \in \mathbb{R}\,,$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\,,\ x \in \mathbb{R}\,, \qquad \operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\,,\ x \in \mathbb{R}\,.$$
- Teorema de Bolzano: Sea $f(x)$ una función continua en $[a, b]$. Si $f(a)$ y $f(b)$ tienen distinto signo, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.
- Teorema del valor medio: Sea $f(x)$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = (f(b) - f(a))/(b - a)$. (El caso especial cuando $f(a) = f(b)$ y $f'(c) = 0$ es el teorema de Rolle.)

---

1. (a) [1 punto] Decida si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}$ diverge, converge condicionalmente o converge absolutamente. Razone su respuesta.

Puesto que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$, se deduce que los términos pares de la sucesión $\displaystyle(-1)^n\frac{n}{n+1}$ se irán acercando al valor 1 y los impares a -1.
Por lo tanto, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}$ no existe, así que no es cero. Por el criterio del término general, se sigue que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}$ diverge.

Comentarios sobre algunos errores comunes.
No se puede usar el criterio de Leibniz, puesto que las condiciones del criterio no se cumplen. Es importante destacar que este criterio sólo sirve para probar que una serie es convergente, y nunca que es divergente. Por tanto, es imposible probar que la serie dada diverge aplicando dicho criterio.
Tampoco se puede usar el criterio de comparación y similares para discutir la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}$ ya que no es una serie de términos positivos.
Probar que diverge la serie con el valor absoluto: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{n}{n+1}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$, justificando el trabajo correctamente, equivale a la mitad de la puntuación.
Por supuesto, es importante expresar la respuesta de forma correcta, así que es correcto decir que la serie dada no converge absolutamente pero no se admiten respuestas del tipo "absolutamente divergente" u otras expresiones no definidas.

(b) [1,5 puntos] Decida razonadamente si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)2^n}{n!}$ converge o diverge.

Debido a la presencia de factoriales, es aconsejable intentar usar el criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+2)2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(n+1)2^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)2^{n+1}n!}{(n+1)2^n(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+2)}{(n+1)(n+1)}=0.$$

Puesto que el límite es estrictamente menor que uno, la serie converge. (Obsérvese que el límite es cero porque se trata del cociente de dos polinomios y el del numerador es de menor grado.)

Comentarios sobre algunos errores comunes.
Es un error serio considerar el límite del cociente recíproco: $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}$ y razonar que la serie diverge por ser el límite mayor que uno.
También es una falta grave hacer cancelaciones erróneas u otros errores serios de tipo algebraico.
Es importante destacar que sería imposible usar el criterio de la raíz en este ejercicio sin haber visto la fórmula de Stirling que no hemos dado en este curso.
Razonando sin fórmulas que 2^n es mucho más pequeño que $n!$ cuando n es grande era posible obtener una puntuación parcial pero es incorrecto afirmar lo contrario (tal y como lo han hecho varias personas).

---

2. Calcule razonadamente la derivada de la función

$$f(x) = (e^x + 1)^x \,, \qquad x > 0 \,.$$

Como hay funciones de x tanto en la base como en el exponente, lo mejor es aplicar derivación logarítmica:

$$\log f(x) = \log (e^x + 1)^x = x \cdot \log (e^x + 1)$$

Ahora derivamos ambos lados de la igualdad:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \log (e^x + 1) + x \cdot \frac{e^x}{e^x + 1}$$

y despejamos $f'(x)$ que es lo que queríamos encontrar:

$$f'(x) = f(x) \left(\log (e^x + 1) + x \cdot \frac{e^x}{e^x + 1} \right) = (e^x + 1)^x \left(\log (e^x + 1) + x \cdot \frac{e^x}{e^x + 1} \right)$$

---

3. (a) [1,5 punto] Calcule razonadamente el valor exacto de la integral

$$\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^{2x}+1}\, dx\,.$$

Muestre los detalles del trabajo.

Hacemos el cambio de variable $u = e^x$, con lo que $du = e^x dx$, los nuevos límites de integración son $e^0 = 1$ y $e^{\ln 2} = 2$, y la integral queda

$$\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^{2x}+1}\, dx = \int_1^2 \frac{du}{u^2+1} = \arctan u|_1^2 = \arctan 2 - \arctan 1 = \arctan 2 - \frac{\pi}{4}$$

(b) [1 punto] Calcule el área de la región en el plano acotada por las curvas $y = x^2 - 2x + 1$ e $y = 1 - x^2$.

Para poder determinar la región pedida, empezamos hallando los puntos de intersección de las curvas:

$$x^2 - 2x + 1 = 1 - x^2 \Longrightarrow 2x^2 - 2x = 0 \Longrightarrow 2x(x-1) = 0 \Longrightarrow x = 0, x = 1.$$

La curva que queda por debajo en el intervalo $[0,1]$ es $y = x^2 - 2x + 1$, con lo que el área pedida es la integral

$$\int_0^1 \left(1 - x^2 - (x^2 - 2x + 1)\right) dx = \int_0^1 2x - 2x^2 = x^2 - \frac{2}{3}x^3|_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

---

4. La sucesión (a_n) viene definida de forma recurrente como sigue:

$$a_0 = 1\,, \qquad a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3} \quad \text{para cada } n \geq 0.$$

(a) [1 punto] Demuestre que $1 \leq a_n < 3$ para todo $n \geq 0$.

Aplicamos inducción dos veces:

1. Sea $\mathcal{P}(n)$ la afirmación $a_n \geq 1$.

   a) $\mathcal{P}(0)$ es verdad, ya que $a_0 = 1 \geq 1$;

   b) suponemos que $\mathcal{P}(n)$ sea verdad; entonces

   $$a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3} \geq \sqrt{2 \cdot 1 + 3} = \sqrt{5} \geq 1,$$

   con lo que $\mathcal{P}(n+1)$ sería verdad, así que por el principio de inducción, $\mathcal{P}(n)$ es verdad para todo n y por tanto $a_n \geq 1$.

2. Sea $\mathcal{P}(n)$ la afirmación $a_n < 3$.

   a) $\mathcal{P}(0)$ es verdad, ya que $a_0 = 1 < 3$;

   b) suponemos que $\mathcal{P}(n)$ sea verdad; entonces

   $$a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3} < \sqrt{2 \cdot 3 + 3} = \sqrt{9} = 3,$$

   con lo que $\mathcal{P}(n+1)$ sería verdad, así que por el principio de inducción, $\mathcal{P}(n)$ es verdad para todo n y por tanto $a_n < 3$.

Por supuesto, la demostración también se puede escribir con la desigualdad doble, haciendo ambas demostraciones a la vez.

(b) [0,5 punto] Demuestre que la sucesión (a_n) es creciente.

Hay varias maneras de ver esto.

1) Podemos razonar como sigue:

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3} > \sqrt{2a_n + a_n} = \sqrt{3a_n} > \sqrt{a_n \cdot a_n} = |a_n| = a_n$$

donde hemos usado en las desigualdades que $3 > a_n$, y en la última igualdad que a_n es positiva ya que $a_n \geq 1$.

2) Alternativamente, podemos transformar la desigualdad, recordando que $a_n > 0$:

$$\begin{aligned} a_n < a_{n+1} \quad &\Leftrightarrow \quad a_n < \sqrt{2a_n + 3} \\ &\Leftrightarrow \quad a_n^2 < 2a_n + 3 \\ &\Leftrightarrow \quad a_n^2 - 2a_n - 3 < 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (a_n + 1)(a_n - 3) < 0\,. \end{aligned}$$

Esta última desigualdad se cumple ya que $a_n + 1 > 0$ y $a_n - 3 < 0$ por el apartado (a) y, por tanto, queda probado que la sucesión es creciente.

3) Finalmente, podemos razonar por inducción. Tenemos que comprobar primero que $a_1 > a_0$ y luego, a partir de la hipótesis $a_{n+1} > a_n$ deducir que $a_{n+2} > a_{n+1}$.
Es cierto que $a_1 > a_0$ ya que $a_0 = 1$ y $a_1 = \sqrt{2a_0 + 3} = \sqrt{5} > 1$.
Suponiendo que $a_{n+1} > a_n$, se sigue que $2a_{n+1} + 3 > 2a_n + 3$. Podemos extraer las raíces cuadradas de ambos lados de la desigualdad ya que sabemos del apartado (a) que $a_n \geq 1$ y, por tanto, $2a_n + 3 > 0$. Luego $\sqrt{2a_{n+1} + 3} > \sqrt{2a_n + 3}$, lo cual significa que $a_{n+2} > a_{n+1}$.

(c) [1 punto] Deduzca que la sucesión (a_n) tiene un límite L. Calcule el valor de L.

En primer lugar, hemos de justificar la existencia del límite. Ya sabemos de los apartados anteriores que la sucesión es creciente y acotada. Por el teorema sobre las sucesiones acotadas y monótonas (también conocido como el Bolzano-Weierstrass), se sigue que la sucesión (a_n) tiene un límite que llamaremos L.

Puesto que $1 \leq a_n < 3$ para todo n, pasando al límite cuando $n \to \infty$, se sigue que $1 \leq L \leq 3$.

Por la definición recurrente de la sucesión, $a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3}$, y tomando límites en ambos lados de la igualdad queda

$$L = \sqrt{2L + 3} \Longrightarrow L^2 - 2L - 3 = 0 \implies L = 3 \text{ ó } L = -1\,.$$

Como $L = -1$ no cumple $1 \leq L \leq 3$, dicho valor no puede aparecer como límite, por lo que $L = 3$.

---

5. Consideremos la función
$$f(x) = x^2 e^{-x^2}\,.$$
(a) [1 punto] Calcule el límite $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{2xe^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0$$

(b) [1,5 puntos] Determine el polinomio de Taylor de $f(x)$ de grado 4 centrado en $a = 0$.

La forma más rápida de proceder es tomar la serie de Taylor de e^x (incluido en la primera página del examen), y sustituir la x por $-x^2$, lo que da

$$e^{-x^2} = 1 + (-x^2) + \frac{1}{2!}(-x^2)^2 + \frac{1}{3!}(-x^2)^3 + \dots$$

Multiplicamos lo anterior por x^2, obteniendo

$$x^2 e^{-x^2} = x^2(1 + (-x^2) + \frac{1}{2!}(-x^2)^2 + \dots) = x^2 - x^4 + \frac{1}{2}x^6 + \dots$$

Por lo que el polinomio de Taylor pedido será $x^2 - x^4$.

---

6. Halle los puntos de máximo y mínimo de la función F, dada por $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2-x} e^{t^2}\,dt$.

Para derivar $F(x)$, la escribimos como composición de las funciones $G(x) = \displaystyle\int_0^{x} e^{t^2}\,dt$ y de la función $g(x) = x^2 - x$, con lo que $F(x) = G(g(x))$, y su derivada es

$$F'(x) = G'(g(x)) \cdot g'(x)$$

La derivada de G se halla por el teorema fundamental del cálculo (siendo $G'(x) = e^{x^2}$), así que

$$F'(x) = G'(g(x)) \cdot g'(x) = e^{(x^2-x)^2} \cdot (2x-1).$$

Los puntos críticos de F son aquellos en que $F'(x) = 0$ (al ser F derivable en todo punto, no hay otros puntos que examinar para buscar máximos/mínimos), con lo que queda la ecuación

$$F'(x) = e^{(x^2-x)^2} \cdot (2x-1) = 0, \Longrightarrow 2x - 1 = 0 \Longrightarrow x = \frac{1}{2},$$

ya que $e^{(x^2-x)^2}$ es siempre positivo.
Para ver qué tipo de punto crítico es $x = 1/2$, observamos que para $x < 1/2$, $F'(x) < 0$ y para $x > 1/2$, $F'(x) > 0$, así que $x = 1/2$ es un mínimo local.
De hecho, el mínimo es global puesto que F decrece en $(-\infty, \frac{1}{2}]$ y crece en $[\frac{1}{2}, +\infty)$.
