Cálculo I (Grado en Ingeniería Informática)

Problemas resueltos, 2012-13, 2013-14 y 2014-15 (tercera parte)

Preparado por los profesores de la asignatura: Pablo Fernández, Dragan Vukotić, Luis Guijarro (coordinadores), Kazaros Kazarian y José Luis Torrea

1. Para la función $f(x) = x \operatorname{sen} x$, halle su polinomio de Taylor de orden 2 en $a = 0$.

SOLUCIÓN. La respuesta es: $P_2(x) = x^2$. Como recordaremos de la teoría vista en clase, los polinomios de Taylor en $a = 0$ de la función $\operatorname{sen} x$ son

$$x\,, \quad x - \frac{x^3}{3!}\,, \quad x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\,,$$

etc. Multiplicándolos por x, obtenemos que los polinomios correspondientes de $f(x)$ son x^2, $x^2 - x^4/3!$, etc. El primero es de grado 2 mientras que el siguiente ya es de grado 4; por tanto, $P_2(x) = x^2$.
Otra manera de llegar a la misma conclusión es calculando

$$f'(x) = \operatorname{sen} x + x\cos x\,, \qquad f''(x) = 2\cos x - x\operatorname{sen} x$$

y evaluándolos en $x = 0$, para luego calcular $P_2(x) = f(0) + f'(0) + \dfrac{f''(0)}{2}x^2 = x^2$.

2. Calcule el polinomio de Taylor de grado 6 de la función $f(x) = \cos x$ en el punto $x = 0$. Utilizando la fórmula anterior, calcule $g^{(8)}(0)$ de la función $g(x) = \cos x^2$.

SOLUCIÓN. Calculando las derivadas de f de todos los órdenes hasta 6 y aplicando la fórmula general para el polinomio de Taylor o, alternativamente, partiendo de la fórmula (vista en clase) para la serie de Taylor de la función coseno en $x = 0$, obtenemos

$$P_6(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$$

Sustituyendo x^2 en lugar de x, se obtiene el polinomio de Taylor (Maclaurin) de orden 12 de la función g:

$$1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{12}}{6!}$$

El coeficiente al lado de x^8 es igual a $g^{(8)}(0)/8!$. Igualando ambas cantidades, vemos que

$$\frac{1}{4!} = \frac{g^{(8)}(0)}{8!}\,.$$

Despejando, obtenemos

$$g^{(8)}(0) = \frac{8!}{4!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 56 \cdot 30 = 1680\,.$$

3. Consideremos la función

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \frac{\pi^2 x^2}{8}\,.$$

Determine el polinomio de Taylor de orden 3 de la función f centrado en $x = 0$.

SOLUCIÓN. Hay varias formas de hacer este problema. La más rápida es usar la fórmula para el polinomio de Taylor de $\cos x$ remplazando la x por $\frac{\pi x}{2}$, y recordar que el polinomio de Taylor de grado 3 de $\frac{\pi^2 x^2}{8}$ centrado en 0 coincide con $\frac{\pi^2 x^2}{8}$. Esto nos daría

$$p_{3,0}(x) = 1 - \frac{\left(\frac{\pi x}{2}\right)^2}{2} - \frac{\pi^2 x^2}{8} = 1 - \frac{\pi^2 x^2}{8} - \frac{\pi^2 x^2}{8} = 1 - \frac{\pi^2 x^2}{4}.$$

La otra posibilidad es hallar $f(0), f'(0), \dots, f'''(0)$ y sustituir en la fórmula del polinomio de Taylor. Esto resulta en

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \frac{\pi^2 x^2}{8}, \\ f'(x) &= -\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \frac{\pi^2 x}{4}, \\ f''(x) &= -\frac{\pi^2}{4}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \frac{\pi^2}{4}, \\ f'''(x) &= \frac{\pi^3}{8}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right), \end{aligned}$$

y en

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = -\frac{\pi^2}{2}, \quad f'''(0) = 0.$$

Con lo que al sustituir en la fórmula del polinomio de Taylor nos queda el polinomio $p_{3,0}(x)$ anterior.

4. Estime el error de aproximación de la función $f(x) = \cos x$ cerca de $a = 0$ por el polinomio de Taylor de grado 3 y en el punto $x = \frac{1}{10}$.

SOLUCIÓN. Para obtener el polinomio de Taylor $P_n(x)$ de orden n de la función coseno, tenemos dos formas de proceder:
1) usar el desarrollo de $\cos x$ en serie de Taylor alrededor de $a = 0$; en este caso:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots ,$$

truncando luego la serie después de la potencia x^n;
2) calcular las derivadas sucesivas $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, …, evaluándolas en $a = 0$, etc.
De cualquiera de las dos maneras, obtendremos:

$$P_0(x) = 1 = P_1(x)\,, \quad P_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2} = P_3(x)\,, \quad P_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} = P_5(x)\,, \quad \dots$$

Los polinomios P_2 y P_3 coinciden porque $f'''(0) = 0$, lo cual significa que no hay ningún término con x^3. Lo que nos interesa en concreto en este caso es $P_3(x) = 1 - x^2/2$ y $x = 1/10$. El error que se comete al aproximar $\cos x$ por $P_3(x)$, según la fórmula vista en clase, es igual a $E = f^{(4)}(c)(x-a)^4/4!$ para algún punto c entre $a = 0$ y $x = 1/10 = 0,1$. Recordando que $f^{(4)}(x) = \cos x$, tenemos la siguiente estimación para E;

$$|E| \le \frac{|f^{(4)}(c) \cdot 0,1^4|}{24} = \frac{|\cos c| \cdot 0,0001}{24} \le \frac{0,0001}{24} \approx 0,00004167\,.$$

5. Calcule la integral indefinida

$$\int \operatorname{sen}^2 x \, \cos x \, dx \, .$$

SOLUCIÓN. Aplicando el cambio de variable: $\operatorname{sen} x = t$, $\cos x \, dx = dt$, la integral se transforma en $$\int \operatorname{sen}^2 x \, \cos x \, dx = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + C \, ,$$ donde la constante C es arbitraria.

6. Calcule la integral indefinida $\displaystyle\int \operatorname{arc\,tg} x \, dx$.

SOLUCIÓN. Aplicando Integración por partes, con $u = \operatorname{arc\,tg} x$ y $dv = dx$, obtenemos $$du = \frac{1}{x^2+1} \, dx \, , \qquad v = x \, .$$ Por lo tanto, según la fórmula para la Integración por partes, se obtiene $$\int \operatorname{arc\,tg} x \, dx = x \operatorname{arc\,tg} x - \int \frac{x \, dx}{x^2+1} = x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2} \frac{1}{x^2+1} + C \, .$$ (La última integral se suele calcular o bien directamente o bien mediante la sustitución $x^2 + 1 = t$.)

7. Evalúe la integral indefinida

$$\int \frac{dx}{9\,x^2 + 6\,x + 5} \, .$$

SOLUCIÓN. Completando el cuadrado en el denominador: $$9x^2 + 6x + 5 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x + 1 + 4 = (3x+1)^2 + 4 \, ,$$ obtenemos $$I = \int \frac{dx}{9\,x^2 + 6\,x + 5} = \int \frac{dx}{(3x+1)^2 + 4} = \frac{1}{4} \cdot \int \frac{dx}{\left(\frac{3x+1}{2}\right)^2 + 1} \, .$$ Después del siguiente cambio de variable (bastante obvio): $$(3x+1)/2 = t \, , \qquad dx = (2t/3) \, dt \, ,$$ se obtiene $$I = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{6} \operatorname{arc\,tg} t + C = \frac{1}{6} \operatorname{arc\,tg} \frac{3x+1}{2} + C \, ,$$ donde C denota una constante real arbitraria.

8. Calcule la integral indefinida

$$\int \operatorname{sen}^2 x \, \cos^3 x \, dx \, ,$$

aplicando la relación fundamental entre las funciones trigonométricas: $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

SOLUCIÓN. Observemos que

$$\int \operatorname{sen}^2 x \, \cos^3 x \, dx = \int \operatorname{sen}^2 x \, \cos^2 x \, \cos x \, dx = \int \operatorname{sen}^2 x \, (1 - \operatorname{sen}^2 x) \, \cos x \, dx \, .$$

Al igual que antes, podemos aplicar el cambio de variable $\operatorname{sen} x = t$, obteniendo $\cos x \, dx = dt$. La integral se convierte en

$$\int \operatorname{sen}^2 x \, \cos^3 x \, dx = \int t^2 (1 - t^2) \, dt = \int (t^2 - t^4) \, dt = \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + \frac{\operatorname{sen}^5 x}{5} + C \, .$$

9. Calcule razonadamente la integral $I = \displaystyle\int_1^3 \frac{x \, dx}{x^4 + 1}$.

SOLUCIÓN. Hacemos el cambio de variable $u = x^2$, con lo que $du = 2x \, dx$ y $x^4 + 1 = u^2 + 1$: la integral queda entonces como

$$I = \int_1^9 \frac{du}{2(u^2 + 1)}$$

(observe que hemos cambiado los límites de la integral de acuerdo con el cambio de variable). En esta integral reconocemos la derivada de la arco tangente, así que

$$I = \frac{1}{2} \int_1^9 \frac{du}{u^2 + 1} = \frac{1}{2} \left[\operatorname{arc\,tg} u \right]_1^9 = \frac{1}{2} \left(\operatorname{arc\,tg} 9 - \operatorname{arc\,tg} 1 \right)$$

Se puede escribir un poco más si se reconoce que $\operatorname{arc\,tg}(1) = \pi/4$.

10. Calcule el valor exacto de la integral

$$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x}(1 + x)} \, .$$

SOLUCIÓN. Aplicando el *cambio de variable* $\sqrt{x} = t$ en nuestra integral definida, obtenemos:

$$\frac{dx}{2\sqrt{x}} = dt \, , \quad x = t^2 \, ; \qquad x = 1 : \; t = 1 \, , \quad x = 3 : \; t = \sqrt{3} \, ,$$

de manera que

$$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x}(1 + x)} = 2 \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1 + t^2} = 2 \operatorname{arc\,tg} x \big|_1^{\sqrt{3}} = 2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{6} \, .$$

11. Calcule la integral indefinida

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \, \cos x} \, .$$

Solución. Primero aplicamos un truco visto en otros ejercicios similares:

$$I = \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \, \cos x} = \int \frac{\cos x \, dx}{\operatorname{sen}^2 x \, \cos^2 x}$$

y luego el cambio de variable $t = \operatorname{sen} x$. Observemos que $|t| < 1$ y $t \neq 0$ puesto que $\operatorname{sen} x \, \cos x \neq 0$. Del cambio de variable obtenemos que

$$dt = \cos x \, dx \,, \qquad \cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x = 1 - t^2$$

y, por tanto,

$$I = \int \frac{dt}{t^2 \, (1 - t^2)} = \int \frac{dt}{t^2 \, (1+t) \, (1-t)} \,.$$

De esta manera hemos conseguido reducir la integral I a la integral de una función racional de t. Ésta se puede calcular usando las **fracciones simples o parciales**:

$$\frac{1}{t^2 \, (1+t) \, (1-t)} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{1-t} + \frac{C}{t} + \frac{D}{t^2} \,.$$

Multiplicando ambos lados por el denominador de la izquierda: $t^2 \, (1+t) \, (1-t)$, obtenemos la condición

$$1 = At^2 \, (1-t) + Bt^2 \, (1+t) + Ct \, (1-t^2) + D \, (1-t^2) \,.$$

Agrupando los términos constantes y los términos que contienen a t, t^2 y t^3 respectivamente, vemos que

$$1 = D + Ct + (A + B - D)t^2 + (-A + B - C)t^3 \,.$$

Para que el polinomio (constante) a la izquierda y el polinomio a la derecha sean iguales para todo $t \in \mathbb{R}$, es necesario y suficiente que sus coeficientes correspondientes sean iguales, luego

$$D = 1 \,, \quad C = 0 \,, \quad A + B - D = 0 \,, \quad -A + B - C = 0 \,.$$

De ahí se sigue inmediatamente que $D = 1$, $C = 0$, $A + B = 1$ y $B = A$. De las dos últimas ecuaciones fácilmente obtenemos $A = B = 1/2$. Por lo tanto,

$$\frac{1}{t^2 \, (1+t) \, (1-t)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-t} + \frac{1}{t^2} \,,$$

que es la representación buscada. Puesto que $1 + t > 0$ y $1 - t > 0$ podemos aplicar la formula

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + C \,, \qquad x > 0 \,.$$

Integrando obtenemos

$$I = \frac{1}{2} \ln(t+1) - \frac{1}{2} \ln(1-t) - \frac{1}{t} + C = \frac{1}{2} \ln \frac{t+1}{1-t} - \frac{1}{t} + C \,,$$

donde $C \in \mathbb{R}$ es una constante arbitraria. Finalmente, sustituyendo de nuevo $t = \operatorname{sen} x$, vemos que

$$I = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x} + C \,.$$

12. Evalúe la integral definida

$$\int_{\sqrt{3}}^{3} \frac{dx}{(x-1)(9+x^2)}\,.$$

SOLUCIÓN. Primero descomponemos la fracción en suma de fracciones simples. Dado que $9+x^2 \geq 9 > 0$, este trinomio cuadrático no tiene ceros reales, luego no se puede factorizar más (en factores lineales con coeficientes reales). Por tanto, según la teoría, buscamos los números reales A, B y C para los que

$$\frac{1}{(x-1)(9+x^2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{9+x^2}$$

para todo x. Multiplicando ambos lados por $(x-1)(9+x^2)$, obtenemos

$$1 = A(9+x^2) + (x-1)(Bx+C) = (A+B)x^2 + (C-B)x + 9A - C\,, \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Comparando los coeficientes del polinomio a la derecha con los del polinomio constante uno, deducimos que

$$A+B=0\,, \quad C-B=0\,, \quad 9A-C=1\,.$$

Por tanto, $B=C=-A$ y $10A=1$, luego $A=1/10$ y $B=C=-1/10$. Finalmente,

$$\frac{1}{(x-1)(9+x^2)} = \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{1}{10}\cdot\frac{x+1}{9+x^2} = \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{1}{10}\cdot\frac{x}{9+x^2} - \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{9+x^2}\,.$$

La primera fracción se integra directamente, hay que tener en cuenta que $x-1>0$ puesto que $x \in [\sqrt{3},3]$. La segunda fracción se integra usando el cambio de variable $t = 1+x^2$ y la tercera, directamente o poniendo primero $x = 3t$. El resultado final es

$$\begin{aligned}
\int_{\sqrt{3}}^{3} \frac{dx}{(x-1)(9+x^2)} &= \left(\frac{1}{10}\ln(x-1) - \frac{1}{20}\ln(9+x^2) - \frac{1}{30}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{3}\right)\Bigg|_{\sqrt{3}}^{3} \\
&= \frac{1}{10}\ln\frac{2}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{20}\ln\frac{18}{12} - \frac{1}{30}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right) \\
&= \frac{1}{10}\ln(\sqrt{3}+1) - \frac{1}{20}\ln\frac{3}{2} - \frac{\pi}{360}\,.
\end{aligned}$$

13. Calcule el valor de la integral $\displaystyle\int_0^{\ln 2} xe^x\,dx$.

SOLUCIÓN. Integrando por partes:

$$u = x\,, \quad dv = e^x\,dx\,, \qquad du = dx\,, \quad v = e^x\,,$$

obtenemos

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C\,.$$

Por el Primer Teorema Fundamental del Cálculo, tenemos que

$$\int_0^{\ln 2} xe^x\,dx = (xe^x - e^x)\big|_0^{\ln 2} = \ln 2 e^{\ln 2} - e^{\ln 2} - (0 - e^0) = 2\ln 2 - 2 + 1 = 2\ln 2 - 1\,.$$

14. Calcule el área comprendida entre las curvas $f(x) = \dfrac{1}{x}$ y $g(x) = 4 - x$.

SOLUCIÓN. Los puntos de intersección de las dos gráficas se encuentran resolviendo la ecuación $f(x) = g(x)$, es decir, $\dfrac{1}{x} = 4 - x$. Para $x \neq 0$, la ecuación es equivalente a $1 = 4x - x^2$, que es lo mismo que $x^2 - 4x + 1 = 0$. Las soluciones de esta ecuación cuadrática son

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3},$$

siendo ambas positivas y menores que 4 ya que $2 > \sqrt{3}$. Observando las gráficas de las funciones f y g entre $x = 2 - \sqrt{3}$ y $x = 2 + \sqrt{3}$, vemos que $g(x) > f(x)$ en dicho intervalo y que encierran una región en forma parecida a la de media luna, contenida en el triángulo con los vértices $(0,0)$, $(4,0)$ y $(0,4)$. Esto se puede comprobar algebraicamente, pues en el intervalo $(2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$ se cumple $x^2 - 4x + 1 < 0$, luego $1 < 4x - x^2$ y, al ser x positivo, podemos dividir por x para deducir que $4 - x > \dfrac{1}{x}$.
El área entre las dos gráficas es, por tanto,

$$A = \int_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}} (g(x) - f(x))\, dx = \int_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}} (4 - x - \frac{1}{x})\, dx = (4x - \frac{x^2}{2} - \ln|x|)\Big|_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}} = 4\sqrt{3} - \ln\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\,.$$

15. Halle $F'(x)$ cuando la función F viene dada por $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} e^{-t}\, dt$.

SOLUCIÓN. Considerando la función $g(x) = \displaystyle\int_0^{x} e^{-t}\, dt$, vemos que F es la función compuesta de g y $h(x) = x^2$: $F(x) = g(x^2) = g(h(x))$. Por tanto, la *Regla de la Cadena* y el *Segundo Teorema Fundamental del Cálculo* nos dicen que

$$F'(x) = g'(x^2) \cdot 2x = 2xe^{-x^2}\,.$$

16. Calcule la derivada de la función $F(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{e^x + x} \ln(t^2 + 1)\, dt$.

SOLUCIÓN. Primero representamos F como diferencia de dos integrales:

$$F(x) = \int_{x^2}^{e^x+x} \ln(t^2+1)\, dt = \int_0^{e^x+x} \ln(t^2+1)\, dt - \int_0^{x^2} \ln(t^2+1)\, dt\,.$$

Derivando la diferencia, obtenemos (como en el problema anterior):

$$F'(x) = (e^x + 1)\ln((e^x + x)^2 + 1) - 2x\ln(x^4 + 1)\,.$$

17. Si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es una función continua y $\displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt = 1$, ¿es cierto que siempre existe $c \in (0,1)$ tal que $\displaystyle\int_0^c f(t)\, dt = \frac{1}{3}$? Razone la respuesta.

SOLUCIÓN. Sí, esto se cumple siempre. Damos la prueba a continuación.
En primer lugar, puesto que $f \in C[0,1]$, podemos definir la función F mediante

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt\,, \qquad x \in [0,1]\,.$$

Según el *Teorema Fundamental del Cálculo*, F es diferenciable y, por tanto, continua en el mismo intervalo. Además, F cumple

$$F(0) = \int_0^0 f(t)\,dt = 0\,, \qquad F(1) = \int_0^1 f(t)\,dt = 1\,.$$

Puesto que $0 < 1/3 < 1$, por el *Teorema de Bolzano* se sigue que existe $c \in (0,1)$ tal que $F(c) = 1/3$; es decir,

$$\int_0^c f(t)\,dt = \frac{1}{3}\,.$$

18. (a) Determine los puntos críticos de la función

$$F(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt\,, \qquad x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)\,,$$

en el intervalo indicado.

(b) Razone si los puntos críticos encontrados son puntos de máximo o mínimo o no.

SOLUCIÓN. (a) Aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo, derivamos la función F, obteniendo

$$F'(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,.$$

Para encontrar los puntos críticos de F, igualamos la derivada a cero y obtenemos $\operatorname{sen} x = 0$. Recordando que $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$, la única posibilidad es $x = \pi$.

(b) Para decidir si el punto crítico encontrado, $x = \pi$, es un punto de extremo local o no, calculamos la segunda derivada de F (aplicando la regla del cociente) y examinamos su signo en dicho punto:

$$F''(x) = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)' = \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}\,; \quad F''(\pi) = \frac{\pi \cdot (-1) - 0}{\pi^2} = -\frac{1}{\pi} < 0\,.$$

Por tanto, el punto crítico es un punto de máximo local.

19. Definamos la función F mediante la fórmula

$$F(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2}\,dt\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

(a) Calcule razonadamente su derivada, $F'(x)$. Luego determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los puntos de máximo y mínimo de la función F.

(b) Determine los intervalos de convexidad y concavidad de F y los puntos de inflexión.

Solución. (a) La función f es composición de las funciones $G(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$ y de $g(x) = x^2$, i.e, $F(x) = G(g(x))$. Por la regla de la cadena,

$$F'(x) = G'(g(x)) \cdot g'(x) = e^{-(x^2)^2} \cdot 2x = 2xe^{-x^4}$$

donde hemos usado que por el teorema fundamental del cálculo, $G'(x) = e^{-x^2}$.
Para calcular intervalos de crecimiento y decrecimiento, buscamos los intervalos donde $F'(x)$ sea positiva y negativa. $F'(x)$ tiene un único cero, ya que e^{-x^4} es siempre positivo, y $F'(x)$ sólo se anulará donde lo haga x; además $F'(x)$ tiene el signo de x; por ello, F es decreciente en $(-\infty, 0)$ y creciente en $(0, infty)$.
Esto implica que F tiene un único mínimo en $x = 0$, que además debe ser un mínimo global.
(b) Empezamos calculando la segunda derivada de F:

$$F''(x) = e^{-x^4} + x(-4x^3)e^{-x^4} = (1 - 4x^4)e^{-x^4}$$

F'' se anula sólo cuando $1 - 4x^4 = 0$, lo que ocurre en los puntos $x = \pm 1/\sqrt{2}$. Por ello examinamos el signo de F'' en los intervalos $(-\infty, -1/\sqrt{2})$, $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ y $(1/\sqrt{2}, \infty)$ evaluando F'' en un punto de cada uno:

$$F''(-1) = -3e^{-1} < 0, \quad F''(0) = 1, \quad F''(1) = -3e^{-1}$$

Por lo tanto F es cóncava en $(-\infty, -1/\sqrt{2})$ y $(1/\sqrt{2}, \infty)$ y convexa en $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. Los puntos $x = -1/\sqrt{2}$ y $1/\sqrt{2}$ corresponden a puntos de inflexión, ya que se cambia de cóncavo a convexo o viceversa.

20. Compruebe que la serie p-armónica

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p}\,, \qquad p \in \mathbb{R}\,,$$

converge si y sólo si $p > 1$, usando el Criterio de la integral.

Solución. Cuando $p \leq 0$, el término general de la serie no tiene a cero y, por tanto, la serie diverge. Por tanto, sólo nos interesa considerar el caso $p > 0$.
Cuando $p > 0$, la función $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$ es decreciente en $[1, +\infty)$ ya que el denominador es una función creciente y el numerador es constante. Por tanto, podemos aplicar el *Criterio de la integral*, que nos dice que la serie en cuestión es convergente si y sólo si converge la integral impropia

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{M\to\infty} \int_1^M x^{-p}\,dx = \lim_{M\to\infty} \left.\frac{x^{1-p}}{1-p}\right|_1^M = \lim_{M\to\infty} \frac{M^{1-p} - 1}{1-p}\,.$$

Este último límite es finito si y sólo si $1 - p < 0$, es decir, si $p > 1$.

21. Use el criterio de la integral para decidir si la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$$

es convergente.

Solución. La función
$$f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2} = \frac{1}{x \ln^2 x}$$
es decreciente en $(2, +\infty)$ ya que el denominador es una función creciente y el numerador es constante. Podemos aplicar entonces el *Criterio de la integral*. Éste nos dice que la serie en cuestión es convergente si y sólo si converge la integral impropia
$$\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx\,.$$
Para estudiar la convergencia de esta última integral, empezamos reemplazando la integral impropia por el límite correspondiente
$$\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx = \lim_{A\to\infty} \int_2^A \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx\,.$$
A continuación observamos que el cambio de variable $u = \ln x$ convierte la integral indefinida en
$$\int \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx = \int \frac{1}{u^2}\,du = -\frac{1}{u} + C = -\frac{1}{\ln x} + C$$
lo cual, volviendo a la integral impropia, nos da
$$\lim_{A\to\infty} \int_2^A \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx = \lim_{A\to\infty} -\frac{1}{\ln x}\bigg|_2^A = \lim_{A\to\infty} \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln A} = \frac{1}{\ln 2} < \infty\,.$$
Puesto que la integral correspondiente converge, la serie también converge.