Conjuntos y Números

Lista 6 Curso 2019-20

1) Hallar la parte real y la parte imaginaria de los siguientes números complejos:

$$a)\ \frac{1-i}{1+i} \quad , \quad b)\ \frac{(3-i)(2+i)}{3+i} \quad , \quad c)\ \frac{(2-i)^2}{(3-i)^2} \quad , \quad d)\ \left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$$

2) Expresar en forma polar:

$$a)\ 1+i \quad , \quad b)\ \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \quad , \quad c)\ -\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i \quad , \quad d)\ -2-2i$$

3) Calcular

$$a)\ \exp(2019\pi i) \quad , \quad b)\ \exp(\pi i/2) \quad , \quad c)\ \exp(3^{2019}\pi i/2) \quad , \quad d)\ \exp(-\pi i/4)$$

4) Hallar para qué numeros complejos z y w de módulo 1 se cumple $z+w=2$.
¿Cuándo se cumple $z+w=1$ con z y w de módulo 1?

5) Calcular las raíces cuadradas (complejas) de los números:

$$a)\ 1+i \quad , \quad b)\ 2-i \quad , \quad c)\ 2+i \quad , \quad d)\ 1+2i$$

6) Calcular las raíces complejas de los siguientes polinomios cuadráticos:

$$a)\ z^2+3iz-3+i \quad , \quad b)\ 2z^2+4z+2+i$$

7) $\star$a) Demostrar la siguiente identidad para x que no sea múltiplo entero de 2π y $N \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{n=-N}^{N} e^{inx} = \frac{\operatorname{sen}\left((N+\frac{1}{2})x\right)}{\operatorname{sen}(x/2)}$$

Sugerencia: Es la suma parcial de una progresión geométrica.

b) Demostrar que para todo $x \in \mathbb{R}$ y para todo $N \in \mathbb{N}$, $\left|\operatorname{sen}(2N+1)x\right| \le (2N+1)\left|\operatorname{sen} x\right|$.

8) Calcular los diferentes valores de:

$$a)\ \sqrt[3]{-8} \quad , \quad b)\ \sqrt[3]{-i} \quad , \quad c)\ \sqrt[4]{16i} \quad , \quad d)\ (1+i)^n+(1-i)^n \text{ con } n \in \mathbb{N}$$

9) Dado $n>1$, demostrar que la suma de todas las raíces n-ésimas de 1 es cero.

10) Sea $z = 2e^{2\pi i/5} + 1 + 2e^{-2\pi i/5}$. Utilizando que $\sum_{k=1}^{5} e^{2\pi k i/5} = 0$ (por el problema anterior), probar que $z^2 = 5$. Deducir de ello una expresión para $\cos(2\pi/5)$, que utiliza sólo raíces cuadradas de números naturales.

11) a) Demostrar que si dos enteros positivos n y m son suma de dos cuadrados, entonces su producto también lo es. *Sugerencia:* $|x+iy|^2 = x^2+y^2$.

b) Usando que $13 = 2^2+3^2$ y $29 = 2^2+5^2$, hallar $a, b \in \mathbb{N}$ tales que $377 = a^2+b^2$.

12) Probar las fórmulas $\operatorname{Im}(z) = \dfrac{1}{c^2+d^2}$ y $\dfrac{|z-i|^2}{\operatorname{Im}(z)} + 2 = a^2+b^2+c^2+d^2$ para $z = (ai+b)/(ci+d)$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que $ad-bc=1$.

13) Sean $a,\, z \in \mathbb{C}$ tales que $|a| < 1$ y $|z| < 1$.

a) Comprobar que $1 - \overline{a}z \neq 0$.

b) Demostrar que $|(z-a)/(1-\overline{a}z)| < 1$.

c) Demostrar la identidad

$$1 - \left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|^2 = \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\overline{a}z|^2}$$

para deducir la conclusión del apartado anterior de forma alternativa.