Conjuntos y Números

LISTA 4 CURSO 2019-20

1) Fijado un entero positivo n, definimos $n\mathbb{Z} = \{nk : \ k \in \mathbb{Z}\}$ y consideramos la relación sobre $\mathbb{Z}$ dada por:

$$m\mathcal{R}k \iff m - k \in n\mathbb{Z}.$$

a) Demostrar que es una relación de equivalencia.

b) Describir las clases de equivalencia y el conjunto cociente. Al conjunto cociente de esta relación lo denotamos por $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

2) Considerar la relación definida sobre el plano $\mathbb{R}^2$ por:

$$(x, y)\mathcal{R}(x', y') \iff xy = x'y'.$$

Estudiar si es una relación de equivalencia y, en caso afirmativo, describir las clases de equivalencia.

3) Sea $X = \cup_{i\in I} A_i$ una **partición** de X; es decir, $A_i \cap A_j = \varnothing$ si $i \neq j$. Demostrar que la relación

$$x\mathcal{R}y \iff x \ \textit{e y pertenecen al mismo} \ A_i \ ,$$

es una relación de equivalencia X. Recíprocamente, probar que dada una relación de equivalencia sobre un conjunto X, las clases de equivalencia definen una partición de X.
En definitiva, podemos pensar siempre una relación de equivalencia como una partición.

4) Si $f : X \to V$ es una **función**, probar que

$$x\mathcal{R}y \iff f(x) = f(y)$$

define una relación de equivalencia en X, y que cada una de sus clases de equivalencia es la imagen inversa de un $z \in V$. Establecer una biyección entre el conjunto cociente $X/\mathcal{R}$ e $Im(f)$.

5) Es habitual y más cómodo utilizar la notación $\mathbb{Z}_n$ para referirse a $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Indicar cuáles de las siguientes funciones están bien definidas.

a) $f : \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad f(\overline{m}) = m$ (donde $\overline{m} \in \mathbb{Z}_n$ denota la clase del entero m).

b) $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_n, \quad g(m) = \overline{m}$.

c) $G : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}_n, \quad G((\overline{m}, \overline{k})) = \overline{m + k}$.

d) $H : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}_n, \quad H((\overline{m}, \overline{k})) = \overline{mk}$.

6) Definimos en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la relación

$$(n, m)\mathcal{R}(n', m') \iff \max\{n, m\} = \max\{n', m'\}.$$

a) Demuestra que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

b) Describe la clase de equivalencia del elemento $(2, 2)$.

c) Describe el conjunto cociente.

d) ¿Tienen todas las clases de equivalencia el mismo cardinal? ¿Cuál es el cardinal del conjunto cociente?

7) Sea F el conjunto de todas las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. En F se define la siguiente relación:

$$f\mathcal{R}g \iff \textit{existe } r \in \mathbb{R}, \ r > 0 \ \textit{tal que } f(x) = g(x) \ \textit{para } |x| < r.$$

Demostrar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia sobre F.

8) Considerar las relaciones en $\mathbb{Z}$ definidas por:

$$m\mathcal{R}_1 n \iff 5|(m+2n)$$
$$m\mathcal{R}_2 n \iff 4|(9m+3n)$$

donde $k|\ell$ significa "k divide a ℓ".

a) Decidir si $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ son relaciones de equivalencia.
b) En el caso de que lo sean, describir las clases de equivalencia y los conjuntos cocientes.

9) Sea B un subconjunto finito de un conjunto A. En $\mathcal{P}(A)$ definimos la relación:

$$X\mathcal{R}Y \iff \mathrm{Card}(X \cap B) = \mathrm{Card}(Y \cap B).$$

a) Demostrar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.
b) Describir las clases de equivalencias y el conjunto cociente. ¿Cuántos elementos tiene el conjunto cociente?

10) En $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\varnothing\}$ se define la siguiente relación: $X\mathcal{R}Y \iff \min X = \min Y$.

a) Demostrar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.
b) ¿Cuál es el cardinal de cada una de las clases de equivalencia?
c) ¿Cuál es el cardinal del conjunto cociente?

11) Sean A, B y C tres conjuntos tales que $A \subset B \subset C$ y A equipotente a C (i.e. $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(C)$). Utilizando los resultados del curso, demostrar que los tres conjuntos son equipotentes (i.e. $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(B) = \mathrm{Card}(C)$).

12) Definimos la siguiente relación en $\mathbb{R}$: $x\mathcal{R}y \iff x - y \in \mathbb{Q}$. Demostrar que es una relación de equivalencia. ¿Cuántos elementos tiene cada clase de equivalencia? ¿Es numerable el conjunto cociente?

13) Demostrar que el conjunto de los números irracionales, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, no es numerable.

14) Sea A un conjunto infinito. Demostrar que si $a_1, \ldots, a_n \in A$ son elementos de A, el conjunto $A \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$ es equipotente a A.
(Sugerencia: quitarles a A y a $A \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$ subconjuntos numerables apropiados.)

15) Determinar el cardinal de cada uno de los siguientes conjuntos:

a) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$
b) $\mathbb{N} \times \mathbb{Q}$
c) $(-\pi/2, \pi/2)$ (Usar una función trigonométrica para establecer una biyección con $\mathbb{R}$)
d) El intervalo $I = (0, 1)$ y más generalmente el intervalo (a, b)
e) $I \times I$ (Usar la escritura decimal para inyectar $I \times I$ en I)
f) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
g) El conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos.
h) $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (Usar la escritura decimal para comparar $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ e I)
i) $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$
j) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ (Usar parte d))
k) Los intervalos $[a, b]$ y $[a, b)$ en $\mathbb{R}$ (usar el ejercicio 14).
l) El conjunto de todas las raíces reales (racionales o no) de todos los polinomios con coeficientes racionales (a este conjunto se le llama "conjunto de los números algebraicos").
m) El conjunto de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$ que tienen dos elementos.
n) El conjunto de los números reales $x \in [0, 1)$ en cuyo desarrollo decimal no aparece el 9.