

# Conjuntos y Números

LISTA 3

CURSO 2019-20

- 1) En cada uno de los siguientes casos, se da una relación entre elementos del conjunto que se especifica debajo. Decidir cuáles son **relaciones de orden**; en caso de serlo, estudiar si es o no un **orden total**; de lo contrario, explicar qué propiedad le falla para ser un orden.

$$\begin{array}{cccc} \boxed{x \geq y} & , & \boxed{x < y} & , & \boxed{|x| \leq |y|} & , & \boxed{A \subset B} \\ \boxed{x, y \in \mathbb{R}} & & \boxed{x, y \in \mathbb{R}} & & \boxed{x, y \in \mathbb{R}} & & \boxed{A, B \in \mathcal{P}(X)} \\ \\ \boxed{a \leq c \wedge b \leq d} & , & \boxed{a + b\sqrt{2} \leq c + d\sqrt{2}} \\ \boxed{(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z}^2} & & \boxed{(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z}^2} \end{array}$$

Ojo: por convenio, ' $\subset$ ' incluye el caso ' $=$ '. Se escribe con frecuencia ' $\subseteq$ ', para ayudar a recordarlo.

- 2) Sea  $X$  un conjunto no vacío y  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  una función. Se define en  $X$  la siguiente relación:

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y).$$

Demostrar que la relación  $\mathcal{R}$  es una relación de orden si y sólo si  $f$  es inyectiva.

- 3) Para la relación de orden dada en  $\mathbb{N}$  por  $\boxed{n|m}$ , dar respuesta a las siguientes preguntas:
- ¿Tiene  $\mathbb{N}$  un máximo y/o un mínimo para esta relación?
  - ¿Qué subconjuntos de  $\mathbb{N}$  tienen un máximo y cuáles un mínimo?
  - Dado un intervalo  $A = \{k \in \mathbb{N} : n \leq k \leq m\}$ , ¿qué debe cumplir un  $k \in A$  para ser un elemento maximal de  $A$ ? ¿Y para ser minimal?
  - ¿Cuáles son los minimales de  $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ ?
  - Calcular los elementos minimales de  $I = \{k \in \mathbb{N} : 1 < k \leq 100\}$ .

- 4) Decimos que una relación de orden  $\mathcal{R}$  en un conjunto  $X$  es un **buen orden**, si cada subconjunto no vacío  $A \subset X$  tiene un mínimo, como sucede con el orden ' $\leq$ ' en  $\mathbb{N}$ .

Probar que también están **bien ordenados** por ' $\leq$ ' los siguientes subconjuntos de  $\mathbb{R}$ :

- La unión  $X \cup Y$  de dos subconjuntos  $X, Y \subset \mathbb{R}$ , si cada uno de ellos está bien ordenado.
  - El conjunto  $X = \{a_n + b_m : n, m \in \mathbb{N}\}$ , si  $\{a_n\}, \{b_n\}$ , son dos sucesiones crecientes.
- 5) Probar la afirmación siguiente o dar un contraejemplo que la refute: *Si un conjunto ordenado  $A$  tiene un solo elemento minimal  $a$ , entonces  $a$  es el mínimo de  $A$ .*

- 6) Dar una biyección entre los conjuntos siguientes que transforme una en otra las relaciones de orden dadas sobre ellos:
- Por un lado  $\mathbb{Z}$ , con el orden ' $\leq$ ' habitual y por otro el conjunto de los racionales de la forma  $1 \pm n/(n+1)$ ,  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , también con el orden ' $\leq$ ' habitual.
  - Por un lado  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ , con el orden dado por:  $(a, b)\mathcal{R}(c, d)$  si y sólo si  $|a - c| \leq d - b$  y por otro el conjunto de los discos abiertos del plano, con su centro en el eje  $x$ , ordenados por inclusión.
- 7) ¿Existe una biyección entre  $\mathbb{Z}$  con el orden ' $\leq$ ' habitual y  $\mathbb{Q}$  con el orden ' $\leq$ ' habitual que transforme una en otra las relaciones de orden?
- 8) Dado un alfabeto que, como el nuestro, tiene un orden total establecido, y llamando "palabras" a todas las posibles secuencias finitas de sus signos, se llama *orden lexicográfico* al usado en los diccionarios, listas de nombres, etc., para ordenar el conjunto de palabras.
- Usando el signo ' $\leq$ ' para el orden de las "letras", dar una definición de cuándo la palabra ' $a_1a_2 \dots a_n$ ' precede a la ' $b_1b_2 \dots b_m$ ': decir qué deben cumplir sus letras para ello.
  - Con esa definición, probar que este orden es total; en consecuencia, cada conjunto finito de palabras tendrá un mínimo.
  - (\*) ¿es cierto el apartado anterior para cualquier conjunto infinito de palabras? (y por lo tanto se trataría de un *buen orden*). Demostrarlo o dar un contraejemplo.
- 9) En  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  definimos la siguiente relación:  $x\mathcal{R}y$  si  $x$  e  $y$  tienen el mismo signo y  $|x| \leq |y|$ .
- Demostrar que es una relación de orden, pero que no es de orden total.
  - Hallar el supremo, ínfimo, máximo y mínimo (si los hay) del intervalo  $[-3, 2)$ .
- 10) Se define  $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \cup \{0\}$  y se considera la función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (n, m) &\longrightarrow f(n, m) = 2^n 3^m \end{aligned}$$

y a partir de ella se definen las siguientes relaciones en  $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ :

$$\begin{aligned} (n, m)\mathcal{R}_1(n', m') &\Leftrightarrow f(n, m) \leq f(n', m') \\ (n, m)\mathcal{R}_2(n', m') &\Leftrightarrow f(n, m) \mid f(n', m') \end{aligned}$$

- Demostrar que  $\mathcal{R}_1$  y  $\mathcal{R}_2$  son ambas relaciones de orden. ¿Son relaciones de orden total?
- Hallar los elementos distinguidos (elementos maximales, elementos minimales, supremos, ínfimos, máximos y mínimos) del conjunto  $A = \{(n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* : 1 \leq n + m \leq 4\}$  para cada una de la relaciones de orden  $\mathcal{R}_1$  y  $\mathcal{R}_2$ .