

**Hay que justificar todas las respuestas**

**Tiempo disponible: 90 minutos**

APELLIDOS Y NOMBRE: \_\_\_\_\_ GRUPO: \_\_\_\_\_

--	--	--	--

1. (5 puntos) Definimos en  $\mathbb{R}$  la relación

$$a\mathcal{R}b \iff \sin a = \sin b$$

- (a) Demuestra que  $\mathcal{R}$  es una relación de equivalencia.
- (b) Describe las clases de  $\pi/2$  y  $\pi/4$ . ¿Cuál es el cardinal de la clase del  $\pi/2$ ?
- (c) Describe el conjunto cociente. ¿Cuál es su cardinal?

*En el apartado (a) se pide comprobar con detalle que se cumplen todas las propiedades de una relación de equivalencia. En los apartados (b) y (c) hay que demostrar que el cardinal es igual a alguno de los cardinales de conjuntos importantes:  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{R}$ , etc, y justificar la afirmación dando las funciones adecuadas.*

2. (3 puntos) Dos trabajadores de un banco transportan un contenedor cargado con 1000 lingotes de oro. Los trabajadores planean robar parte del cargamento cambiando lingotes de oro por lingotes de aluminio. Para que el plan salga bien necesitan que el contenedor pese lo mismo antes y después del cambio. Si 13 lingotes de oro pesan lo mismo que 29 lingotes de aluminio, ¿Cuántos lingotes de oro serán capaces de robar y cuántos lingotes de aluminio necesitan para ello?

3. (2 puntos)

- (a) Demostrar que el número  $888^{111} + 111^{888}$  es divisible entre 7.
- (b) Sea  $p$  un número primo y  $k$  un natural menor que  $p$ . Demostrar

$$k^2 \equiv 1 \pmod{p} \iff k = 1 \text{ o } k = p - 1$$