

# Conjuntos y Números

EXAMEN FINAL

21 DE ENERO DE 2019

APELLIDOS: \_\_\_\_\_ NOMBRE: \_\_\_\_\_ GRUPO: \_\_\_\_\_

**Tiempo disponible: 3 horas**

**Hay que justificar todas las respuestas**

--	--	--	--	--	--	--

- (1 punto)** Demostrar que si  $S \cap T = \emptyset$  y  $S \cup T = T$  entonces  $S = \emptyset$ .
- (2 puntos)**
  - Sea  $f : X \rightarrow X$  una función tal que  $f \circ f$  es inyectiva. Demostrar que  $f$  es inyectiva.
  - Sea  $f : X \rightarrow X$  una función sobre. Demostrar que  $f \circ f$  es sobre.
- (1 punto)** Sea  $X$  un conjunto finito. En  $\mathcal{P}(X)$  se define la siguiente relación:  
 $A \mathcal{R} B$  si y solo si el número de elementos de  $A$  es menor o igual que el número de elementos de  $B$   
¿Es  $\mathcal{R}$  una relación de orden?
- (2 puntos)**
  - Demostrar que si  $\text{mcd}(a, b) = 1$ ,  $p$  es un primo impar y  $p^2$  divide a  $a^2 - b^2$ , entonces, o bien  $p^2$  divide a  $a + b$  o bien  $p^2$  divide a  $a - b$ .
  - Demostrar que  $6n^5 - 4n^3 - 2n$  es divisible entre 12, para todo entero  $n$ .
- (2 puntos)** Resolver el sistema
$$\begin{aligned}x &\equiv 2 \pmod{7} \\x &\equiv 5 \pmod{11} \\x &\equiv 11 \pmod{17}\end{aligned}$$
- (2 puntos)** ¿Cuántos factores irreducibles en  $\mathbb{R}[X]$  tiene  $X^{1001} - 1$ ? ¿cuáles son sus grados y cuantas veces aparece cada grado?