UAM, 2020-21. Curso Avanzado de Análisis
Ceros e interpolación de funciones analíticas

Ejercicios: Hoja 1, primera parte

Deben entregarse las soluciones detalladas de los problemas cuyos números vienen enmarcados. El plazo que se indicará en breve.

Auto-aplicaciones holomorfas del disco, automorfismos y el Lema de Schwarz-Pick

$\boxed{\textbf{1)}}$ Sea T una transformación lineal fraccionaria (o de Möbius) no constante:

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad ad - bc \neq 0,$$

Demostrar que $T(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ si y sólo si

$$|b\overline{d} - a\overline{c}| + |ad - bc| \le |d|^2 - |c|^2 .$$

2) Sea $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ una función holomorfa. Si se cumple la igualdad en el lema de Schwarz-Pick: $|f'(z)|(1-|z|^2) = 1 - |f(z)|^2$ en algún $z \in \mathbb{D}$, se pide examinar la prueba del teorema para deducir que entonces f es un automorfismo del disco. Usar esto para deducir que los automorfismos son las únicas isometrías del disco $(\mathbb{D}, d)$, provisto de la métrica hiperbólica.

$\boxed{\textbf{3)}}$ Supongamos que f es analítica en el disco $D(0,r) = \{z : |z| < r\}$ y que satisface la desigualdad $|f(z)| \le M$ para todo $z \in D(0,r)$. Se pide demostrar que entonces

$$\left|\frac{f(z) - f(w)}{z - w}\right| \le \frac{2Mr}{|r^2 - \overline{z}w|}, \qquad \forall z, w \in D(0,r) .$$

4) Sea $f \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$ y supongamos que $|f(z)| \le 1$ en $\mathbb{D}$ y que, además,

$$f(1/2) = f(1/3) = f'(1/3) = 0 .$$

Demuéstrese que $|f(0)| \le 1/18$ y descríbanse todas las funciones f (si existen) para las que se alcanza la cota $1/18$.

Las métricas pseudo-hiperbólica e hiperbólica

5) Sabemos que todo disco pseudo-hiperbólico es también un disco euclídeo. Comprobar que todo disco euclídeo $D(c,R)$ tal que $D(c,R) \Subset \mathbb{D}$ también es un disco pseudo-hiperbólico y demostrar que su radio pseudo-hiperbólico viene dado por la fórmula

$$r = \frac{1 + R^2 - |c|^2 - \sqrt{(1+R^2-|c|^2)^2 - 4R^2}}{2R} = \frac{2R}{1 + R^2 - |c|^2 + \sqrt{(1+R^2-|c|^2)^2 - 4R^2}} .$$

$\boxed{\textbf{6)}}$ Sea $f \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$ tal que $f(\mathbb{D}) \Subset \mathbb{D}$ (subconjunto compacto de $\mathbb{D}$). Demostrar que entonces f es contractiva en la métrica hiperbólica d en el sentido de Banach: existe $q \in (0,1)$ tal que

$$d(f(z), f(w)) \le q \cdot d(z,w), \quad \forall z, w \in \mathbb{D} .$$

Deducir que f tiene un único punto fijo en $\mathbb{D}$.

7) Sean a, b y c tres puntos distintos y en ese orden (b entre a y c), pertenecientes a una geodésica de la métrica hiperbólica. Demostrar las siguientes propiedades de las métricas hiperbólica (d) y pseudo-hiperbólica ϱ, respectivamente:

$$d(a,c) = d(a,b) + d(b,c), \qquad \varrho(a,c) < \varrho(a,b) + \varrho(b,c).$$

Productos de Blaschke finitos. Teorema de Pick-Nevanlinna

$\boxed{\textbf{8)}}$ Sea f una función entera cuyo módulo es constante en $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$. Demostrar que $f(z) = cz^n$ para cierta constante $c \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

9) Sea B un producto de Blaschke de grado n y $a \in \mathbb{D}$. Se pide demostrar que la composición $\varphi_a \circ B$ es un un producto de Blaschke de grado n. Lo mismo para $B \circ \varphi_a$.

10) Demostrar la siguiente versión más fuerte de un resultado visto en clase: si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ y satisface la condición

$$\lim_{|z|\to 1^-} |f(z)| = 1,$$

entonces f es un producto de Blaschke finito. Este lema (Fatou, 1923) nos será útil en algunas aplicaciones.

11) Sean P y Q dos polinomios coprimos (sin factores comunes). El *grado* de la función racional $f = P/Q$ se define como $\operatorname{gr} f = \max\{\operatorname{gr} P, \operatorname{gr} Q\}$. Se pide demostrar que una función racional de grado n es un producto de Blaschke de grado n si y sólo si tiene la forma

$$\frac{z^n \overline{P(1/\overline{z})}}{P(z)} = \frac{\overline{\alpha}_n + \overline{\alpha}_{n-1} z + \ldots + \overline{\alpha}_0 z^n}{\alpha_0 + \alpha_1 z + \ldots + \alpha_n z^n}.$$

12) Examinar la demostración de Marshall del teorema de Pick-Nevanlinna (de los apuntes del día 6 de clase) para comprobar que, en el caso $z_n = w_n = 0$, las matrices correspondientes a las formas cuadráticas Q_n y Q'_n tienen el mismo rango. Probar también que

$$\operatorname{ran} Q_n = 1 + \operatorname{ran} \widetilde{Q}_{n-1}.$$

Deducir, usando la inducción y las propiedades básicas de los productos de Blaschke finitos, que el problema de Pick-Nevanlinna con n pares de datos tiene solución única si y sólo si $\det Q_n = 0$. Finalmente, se pide probar que, cuando se cumple esa condición (es decir, cuando $\operatorname{ran} Q_n = m < n$), entonces la solución es un producto finito de Blaschke de grado m.

$\boxed{\textbf{13)}}$ Demostrar que el producto de dos combinaciones convexas de (varios) productos de Blaschke es también una combinación convexa de productos de Blaschke. (Este lema se necesitará en la demostración de un teorema de aproximación de Fisher.)