# ③ M, 16/02/2021

## Métrica pseudo-hiperbólica

El lema de Schwarz–Pick y los automorfismos del disco motivan la siguiente

**Definición.** La métrica pseudo-hiperbólica en $\mathbb{D}$ es la función $\rho : \mathbb{D}\times\mathbb{D} \to [0,+\infty)$, definida por la fórmula

$$\rho(z,w) = |\varphi_z(w)| = \left|\frac{z-w}{1-\bar{z}w}\right|, \quad z,w\in\mathbb{D}$$

$(\rho(z,0)=|z|)$

**Teorema.** $\rho$ es una métrica en $\mathbb{D}$.

**Demostración** □ Obviamente, $\rho(z,w)\geq 0$ y $\rho(z,w)=0 \iff |z-w|=0 \iff z=w$.

También es claro que $\rho(w,z)=\left|\frac{w-z}{1-\bar{w}z}\right| = \left|\frac{z-w}{1-\bar{z}w}\right| = \rho(z,w)$.

El único punto no obvio es la desigualdad triangular:

(DT) $\rho(a,c)\leq \rho(a,b)+\rho(b,c)$, $\quad a,b,c\in\mathbb{D}$.

- Para demostrarla, necesitaremos otra propiedad útil de $\rho$:

$$\boxed{\forall f\in \mathrm{Aut}(\mathbb{D}),\ \forall a,b\in\mathbb{D},\ \rho(f(a),f(b))=\rho(a,b)}$$

($\rho$ es conformemente invariante).

□ Comprobación: $\rho(f(a),f(b)) = |\varphi_{f(a)}(f(b))| = \left|\frac{f(a)-f(b)}{1-\overline{f(a)}f(b)}\right|$

$$= \left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right| = |\varphi_a(b)| = \rho(a,b).$$

(caso de igualdad en Schwarz–Pick) ⊠

Gracias a la invariancia conforme,

$$(DT) \iff \rho(\varphi_b(a),\varphi_b(c)) \le \rho(\varphi_b(a),\varphi_b(b)) + \rho(\varphi_b(b),\varphi_b(c)), \quad a,b,c \in \mathbb{D}$$

$$\iff \rho(\varphi_b(a),\varphi_b(c)) \le \rho(\varphi_b(a),0) + \rho(0,\varphi_b(c)), \quad a,b,c \in \mathbb{D}.$$

Usando la notación: $z = \varphi_b(a) \in \mathbb{D}$, $w = \varphi_b(c) \in \mathbb{D}$,

vemos que

$$(DT) \iff \rho(z,w) \le \rho(z,0) + \rho(0,w), \quad z,w \in \mathbb{D}$$

$$\iff |\varphi_z(w)| \le |z| + |w|, \quad z,w \in \mathbb{D}.$$

Para demostrar esta última desigualdad, aplicaremos unos razonamientos típicos que conviene recordar. De hecho, probaremos una desigualdad más fuerte:

$$|\varphi_z(w)| \le \frac{|z|+|w|}{1+|z||w|} \qquad (*)$$

(obviamente, el lado derecho es $\le |z|+|w|$).

Primero observamos que ambos lados de $(*)$ son simétricos en $z$ y $w$: si intercambiamos $z$ y $w$, no cambia nada. Por tanto, basta tratar sólo el caso $|z| \le |w|$. Recordando que $|\varphi_z(w)| = \rho(z,w)$ es invariante por los automorfismos del disco y, en particular, por las rotaciones, si $w = \lambda|w|$, $|\lambda| = 1$, vemos que $|w| = \bar{\lambda} w$ y, por tanto:

$$|\varphi_z(w)| = \rho(z,w) = \rho(\bar{\lambda}z, \bar{\lambda}w) = \rho(\bar{\lambda}z, |w|) = |\varphi_{\bar{\lambda}z}(|w|)|$$

$$= |\varphi_{|w|}(\bar{\lambda}z)|.$$

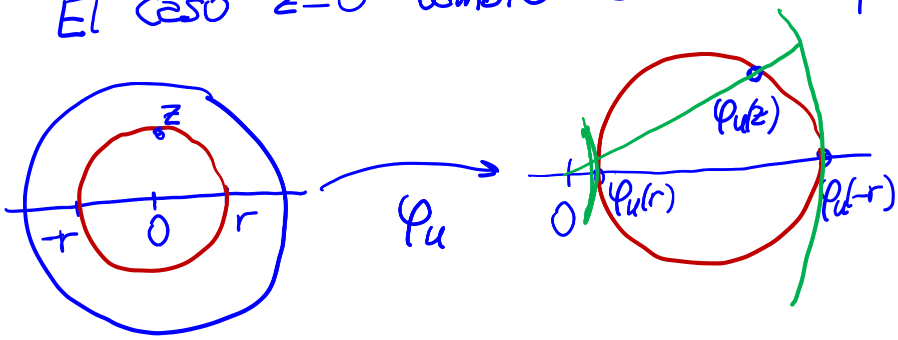
Así que, para probar $(*)$, basta probar

$$|\varphi_{|w|}(\bar{\lambda}z)| \le \frac{|z|+|w|}{1+|z||w|}.$$

Esto es, además de $|z| \leq |w|$, también podemos suponer que $w = |w| = u \in (0,1)$ (siendo el caso $u=0$ trivial). En resumen, sólo nos queda probar que

$$\odot \qquad |\varphi_u(z)| = \left| \frac{u-z}{1-uz} \right| \leq \frac{|z|+u}{1+u|z|}, \quad \text{para } |z| \leq u < 1.$$

El caso $z=0$ también es trivial; por tanto, sea $|z| = r \in (0,1)$.




$\varphi_u$ es una transformación lineal fraccionaria (o transformación de Möbius) y, por tanto, lleva cada circunferencia en una circunferencia o recta. (Hecho básico de Variable Compleja I; véase el libro de Ahlfors, el de Conway o cualquier otro). Puesto que $|1-uz| \geq 1-ur > 0$, ningún punto de la circunferencia $\{z : |z| = r\}$ va al infinito. Luego $\varphi_u(\{z : |z|=r\})$ es, de nuevo, una circunferencia.

$\{z : |z| = r\}$ tiene como diámetro el intervalo $[-r, r]$ y

$$\varphi_u(r) = \frac{u-r}{1-ur} \geq 0, \qquad \varphi_u(-r) = \frac{u+r}{1+ur} > \frac{u-r}{1-ur} \text{ (¡álgebra!).}$$

Por tanto, la circunferencia $\varphi_u(\{z : |z|=r\})$ tiene como diámetro el intervalo $\left[\frac{u-r}{1-ur}, \frac{u+r}{1+ur}\right] \subseteq [0, +\infty)$ y del dibujo dado arriba se desprende que, para $|z| = r$ se tiene $|\varphi_u(z)| \leq \frac{u+r}{1+ur}$, que es justo la desigualdad $\odot$.

Con esto queda probado $\circledast$ y, por tanto, la desigualdad triangular. $\boxtimes$

**Observación.** El mismo dibujo también muestra que
$$\frac{u-r}{1-ur} \le |\varphi_u(z)|,$$
lo cual nos permite deducir
$$\frac{||z|-|w||}{1-|z||w|} \le \left|\frac{z-w}{1-\bar{w}z}\right| \le \frac{|z|+|w|}{1+|z||w|}.$$
Gracias a la invarianza conforme de $\rho$, esto implica la

**Desigualdad triangular mejorada.** $z, w, u \in \mathbb{D} \Rightarrow$
$$\frac{|\rho(z,u)-\rho(u,w)|}{1-\rho(z,u)\rho(u,w)} \le \rho(z,w) \le \frac{\rho(z,u)+\rho(u,w)}{1+\rho(z,u)\rho(u,w)}.$$

Para más detalles sobre la métrica p.h., véanse los libros de Duren y Schuster: "Bergman Spaces" (Capítulo 2) y de Garnett: "Bounded Analytic Functions" (Cap. I).

- **Observación.** El espacio métrico $(\mathbb{D},\rho)$ es acotado, ya que $\forall z,w\in\mathbb{D}$, $\rho(z,w) = |\varphi_z(w)|<1$.

**Ejercicio.** $(\mathbb{D},\rho)$ no es compacto.

(Sugerencia: Basta encontrar una sucesión en $\mathbb{D}$ que (en la métrica habitual euclídea) tiende a 1 pero no tiene ninguna subsucesión convergente en la métrica $\rho$.)

- ¿Qué topología induce la métrica $\rho$? Veámoslo.

**Notación.** Dado $a\in\mathbb{D}$ y $r\in(0,1)$, sea
$$\Delta(a,r) = \{z\in\mathbb{D} : \rho(a,z)<r\}$$
el disco pseudo-hiperbólico de centro (p.h.) $a$ y radio (p.h.) $r$.

**Proposición.** Para todo $a\in\mathbb{D}$, $r\in(0,1)$,

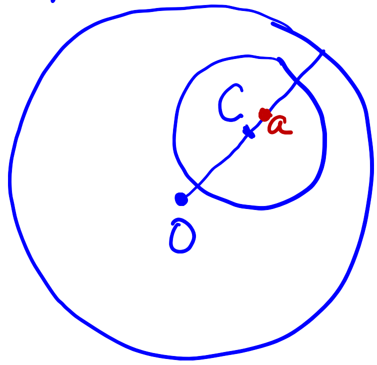
$$\Delta(a,r)=D(C;R)=\{z:|z-C|<R\},$$

el disco euclídeo de centro euclídeo

$$C=\frac{1-r^2}{1-r^2|a|^2}a$$

y radio euclídeo

$$R=\frac{1-|a|^2}{1-r^2|a|^2}r.$$



$\arg C=\arg a$

$|C|<|a|$

$(a\neq 0)$

**Corolario.** La topología inducida por $\rho$ en $\mathbb{D}$ es la usual (ya que coinciden los conjuntos abiertos en ambas topologías).

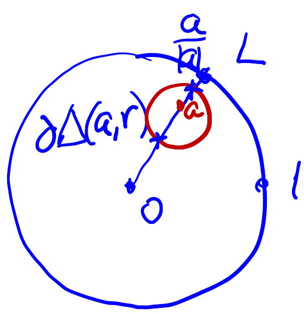
**Dem.** □ $\Delta(a,r)=\{z\in\mathbb{D}: |\varphi_a(z)|<r\}=\{z\in\mathbb{D}: \varphi_a(z)\in D(0;r)\}$

$$=\varphi_a^{-1}(\{w: |w|<r\})=\varphi_a(D(0,r)),$$

la preimagen del disco euclídeo $D(0;r)$ por $\varphi_a$ y, por tanto, también la imagen de $D(0;r)$ por $\varphi_a=\varphi_a^{-1}$.

De nuevo, por las propiedades básicas de las transformaciones de Möbius, $\Delta(a,r)$ es un disco euclídeo, $D(C,R)$. ¿Cómo hallamos $C$ y $R$?

La recta $L$ que pasa por $0$ y $a$ es invariante por $\varphi_a$, ya que $\varphi_a(0)=a$, $\varphi_a(a)=0$ y $\varphi_a(L)$ es una recta pues $\varphi_a\left(\frac{1}{\bar a}\right)=\dfrac{a-\frac{1}{\bar a}}{1-\bar a\cdot\frac{1}{\bar a}}=\infty$. $\therefore\ \varphi_a(L)=L$



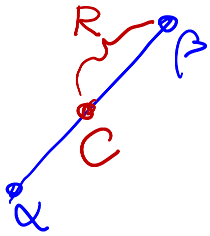
La circunferencia roja, $\partial\Delta(a,r)=\varphi_a(\{z:|z|=r\})$ es ortogonal a $L$.

$\partial\Delta(a,r)\cap L=\{\alpha,\beta\}$, los extremos del diámetro $[\alpha,\beta]$ de $\partial\Delta(a,r)$.

$\varphi_a(\alpha)=-r\frac{a}{|a|}$, $\varphi_a(\beta)=r\frac{a}{|a|}$ (puntos de módulo $r$, ambos en la recta que pasa por $0$ y $a$, esto es, por el punto $\frac{a}{|a|}$ de módulo 1). De aquí obtenemos:

$$\alpha = \varphi_a\left(-\frac{ra}{|a|}\right) = \frac{a + \frac{ra}{|a|}}{1+\bar{a}\frac{ra}{|a|}} = \frac{a}{|a|}\,\frac{|a|+r}{1+r|a|} \qquad (\bar{a}a = |a|^2)$$

$$\beta = \varphi_a\left(\frac{ra}{|a|}\right) = \frac{a - \frac{ra}{|a|}}{1-\bar{a}\frac{ra}{|a|}} = \frac{a}{|a|}\,\frac{|a|-r}{1-r|a|},$$




Por tanto,

$$C = \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{a}{|a|}\,\frac{\frac{|a|+r}{1+r|a|} + \frac{|a|-r}{1-r|a|}}{2}$$

$$= \frac{a}{|a|}\,\frac{(|a|+r)(1-r|a|) + (|a|-r)(1+r|a|)}{2(1-r^2|a|^2)}$$

$$= \frac{a}{|a|}\,\frac{|a|-r^2|a|}{1-r^2|a|^2} = \frac{1-r^2}{1-r^2|a|^2}\,a.$$

$$R = \frac{|\beta-\alpha|}{2} = \cdots = \frac{1-|a|^2}{1-r^2|a|^2}\,r. \qquad \boxtimes$$

• Usando la métrica p.h., podemos reformular el Lema de Schwarz–Pick como sigue:

> Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ y $f(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$, entonces
>
> $$\rho(f(z), f(w)) \leq \rho(z,w) \quad , \forall z,w \in \mathbb{D},$$
>
> con igualdad $\Leftrightarrow f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.

Por tanto, la métrica p.h. es más apropiada que la métrica euclídea para estudiar las funciones analíticas de $\mathbb{D}$ en $\mathbb{D}$ (p.q. son contractivas en $\rho$).

Sin embargo, $\rho$ tiene algunos defectos; por ejemplo, no es una métrica riemanniana. Para remediar este problema, definiremos otra métrica relacionada que sí lo es.

## Métrica hiperbólica

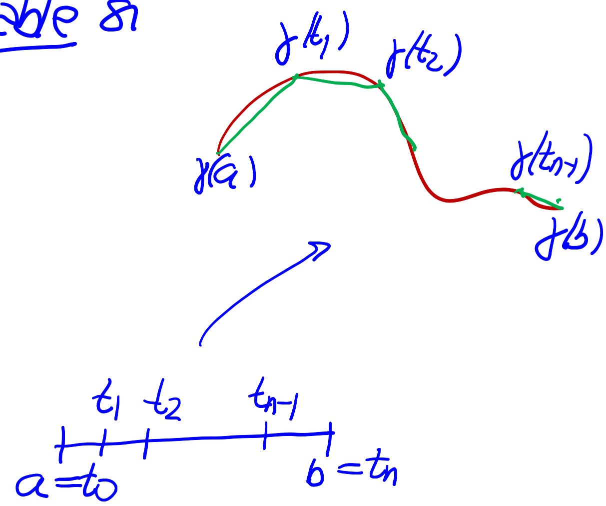
- Antes de empezar, recordemos un par de detalles de las integrales de línea en forma compleja.

Una curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ es rectificable si (o de longitud finita)

$$\ell(\gamma) = \sup_{P} \sum_{k=1}^{n} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| < \infty,$$

donde el supremo se toma sobre todas las particiones finitas de $[a,b]$:

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b.$$




$\ell(\gamma)$ = longitud de la curva $\gamma$.

- Para $\gamma \in C^1[a,b]$ (curva suave o lisa), tenemos la siguiente fórmula: $\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt$.

Escribiendo $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, $\ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt$ (Cálculo I).

- La misma fórmula se tiene si $\gamma$ es suave a trozos; es decir, si $\gamma \in C[a,b]$ y $\gamma'$ es continua en $[a,b]$, salvo en un número finito de puntos $d_k$ en los que tiene límites laterales finitos: $\gamma'_+(d_k)$, $\gamma'_-(d_k)$ son finitos

- Para una función $f : \gamma([a,b]) \to \mathbb{C}$, continua en la traza de $\gamma$, $\gamma([a,b])$, definimos sus integrales de línea (en forma compleja) como sigue:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$$ (Cambia de signo cuando cambia la orientación de $\gamma$)

$$\int_\gamma |f(z)|\,|dz| = \int_a^b f(\gamma(t))\,|\gamma'(t)|\,dt.$$ (no cambia de signo)

Es decir, usaremos la notación diferencial: $dz = \gamma'(t)\,dt$, para $z=\gamma(t)$, $t\in[a,b]$, $|dz| = |\gamma'(t)|\,dt$.

- Por ejemplo, la longitud de una curva $\gamma$, suave a trozos es

$$\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt = \int_\gamma |dz|.$$

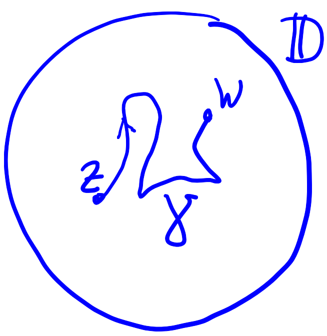
- Con frecuencia usamos la estimación básica:

$$|f| \le M \text{ en } \gamma([a,b]) \Rightarrow \left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \le \int_\gamma |f(z)|\,|dz| \le M\cdot\ell(\gamma).$$

- Si $\lambda : \mathbb{D} \to [0,+\infty)$ es continua en $\mathbb{D}$, la usaremos para definir una métrica en $\mathbb{D}$ y la llamaremos elemento de longitud o densidad de la métrica inducida:

$$d_\lambda(z,w) = \inf_\gamma \int_\gamma \lambda(z)\,|dz| = \inf_\gamma \int_a^b \lambda(\gamma(t))\,|\gamma'(t)|\,dt,$$

tomando el ínfimo sobre todas las $\gamma$ rectificables en $\mathbb{D}$ que unen $z$ con $w$ (o, alternativamente, sobre todas las $\gamma$ $C^1$ a trozos en $\mathbb{D}$ desde $z$ hasta $w$).




Puede comprobarse que esto siempre define una métrica en $\mathbb{D}$.

$d_\lambda(z,w) \ge 0$, obviamente.

Los detalles restantes se verán la próxima vez. (Normalmente se necesita pedir que $\lambda > 0$ o alguna condición similar.)