(24) J, 06/05/2021

FUNCIONES UNIVALENTES Y ESPACIOS DE HARDY

Repaso: aplicaciones conformes (univalentes)

Def'n. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Se dice que f es univalente en Ω si (además de ser holomorfa) es inyectiva en Ω: $z, w \in \Omega, f(z) = f(w) \Rightarrow z = w$.

Se dice que f es localmente univalente en Ω si $\forall z \in \Omega$ $\exists r > 0$ t.q. $D(z; r) \subseteq \Omega$ y f es inyectiva (univalente) en $D(z;r)$.

Ejemplos. • Toda transformación de Möbius (lineal fraccionaria) $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad-bc \neq 0$, es univalente en $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$.

(Puede comprobarse directamente.)

• $f(z) = e^z$ es localmente univalente en $\mathbb{C}$, como veremos en breve, pero no es univalente en $\mathbb{C}$ pues $f(z+2\pi i) = f(z)$. Sin embargo, es univalente en cada banda horizontal $\Omega = \{z = x+iy : a < y < b\}$ de anchura $\leq 2\pi$ $(b-a \leq 2\pi)$.

Comprobación directa: $z = x+iy$, $w = u+iv \in \Omega$, $e^{x+iy} = e^{u+iv}$ $\Rightarrow e^x = e^u$, $y = v + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = u$, $|y - v| \geq 2\pi$ (salvo que $y = v$) $\Rightarrow z = w$.

• $g(z) = z^2$ no es localmente univalente en $z = 0$ pues $\forall r > 0$, $\frac{r}{2}, -\frac{r}{2} \in D(0;r)$, $\frac{r}{2} \neq -\frac{r}{2}$ y $g(\frac{r}{2}) = \frac{r^2}{4} = g(-\frac{r}{2})$.

Obs'n. Obviamente, f es univalente en $\Omega \Rightarrow f$ es localmente univalente en Ω.

El recíproco es falso, como muestra la función exponencial.

[Término alemán: schlicht = univalente]

Los fenómenos que se observan en los ejemplos son fáciles de explicar mediante el siguiente simple resultado.

Teorema. Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $a \in \Omega$. Entonces f es localmente univalente en $a \iff f'(a) \neq 0$.

En particular, si f es univalente en Ω, entonces $\forall z \in \Omega$, $f'(z) \neq 0$.

Comentarios. Ahora queda claro también que $f(z) = e^z$ es localmente univalente en $\mathbb{C}$ pues $f'(z) = e^z \neq 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$. Y también que $g(z) = z^n$ (y, en particular, z^2) no sea localmente univalente en $z=0$: $g'(z) = n z^{n-1}$, $g'(0) = 0$, para $n \geq 2$.

Dem. $\square$ Sea $f = u + iv$. Del primer curso de variable compleja sabemos que $f'(a) = u_x(a) + i v_x(a)$, siendo $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ etc. Además, sabemos que $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ en Ω (ecuaciones de Cauchy-Riemann). Por tanto, el Jacobiano de f en $z=a$ es

$$J_f(a) = \begin{vmatrix} u_x(a) & u_y(a) \\ v_x(a) & v_y(a) \end{vmatrix} = u_x(a)^2 + v_x(a)^2 = |f'(a)|^2.$$

El Tma. de la función inversa (del cálculo multivariable) para $f : \Omega \to \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ nos dice que

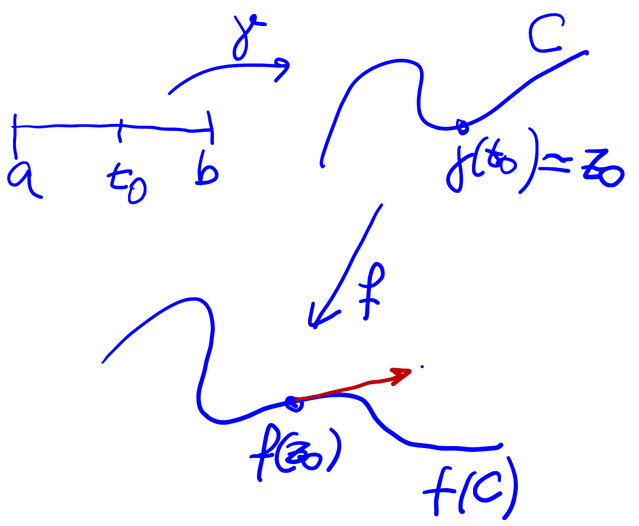
$$|f'(a)|^2 = J_f(a) \neq 0 \iff f \text{ tiene inversa local en (un entorno de) } z=a$$

$\iff f$ es localmente inyectiva en $z=a$. $\boxtimes$

Dem. usando el Tma. de Rouché: E. C. Titchmarsh, The Theory of Functions, Oxford.

Def'n. $f : \Omega \to \mathbb{C}$ se dice conforme en $a \in \Omega$ si preserva ángulos entre curvas (suaves) que se cortan en $z=a$.

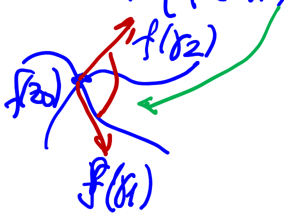
• Si C es un arco suave, parametrizado como $z=\gamma(t)$ y $f:\Omega\to\mathbb{C}$, $C\subseteq\Omega$ y $f'(z_0)\neq 0$, entonces la pendiente del vector tangente al arco $f(C)$ en $f(z_0)$ es:



$$\arg\{(f\circ\gamma)'(t_0)\}=\arg\{f'(z_0)\gamma'(t_0)\}$$
$$=\arg f'(z_0)+\arg\gamma'(t_0).$$

($\arg f'(z_0)$ existe ya que $f'(z_0)\neq 0$). Restando estas expresiones para dos curvas, C_1 y C_2, vemos que

$$\measuredangle(f(C_1),f(C_2))_{\text{en } f(z_0)}=\arg\{(f\circ\gamma_2)'(t_0)\}-\arg\{(f\circ\gamma_1)'(t_0)\}$$
$$=\arg\{\gamma_2'(t_0)\}-\arg\{\gamma_1'(t_0)\}$$
$$=\measuredangle(C_1,C_2) \text{ en } z_0.$$



• Por tanto: $f\in H(\mathbb{D})$, f localmente univalente en $z=a$ $\Rightarrow$ f conforme en $z=a$.

• Recíprocamente: $f\in C^1(\Omega)$ (p.ej., $\Omega=D(a;r)$) y conforme en Ω (L. Ahlfors, Complex Analysis, Cap. 3, Secc. 2.3).
$\Rightarrow f\in H(\Omega)$ o $\bar{f}\in H(\Omega)$

Luego se puede ver que, en el caso $f\in H(\Omega)$, que $f'(a)\neq 0$, $\forall a\in\Omega$.

Por tanto, para $f\in H(\Omega)$:

$$\boxed{f \text{ es conforme en cada punto de } \Omega \Leftrightarrow f \text{ es localmente univalente en } \Omega.}$$

No obstante, con frecuencia decimos que $f:\Omega\to D$ es una aplicación conforme para expresar que f es univalente en Ω y $f(\Omega)=D$; es decir, $f\in H(\Omega)$ y f es biyectiva entre Ω y D. (Ω y D dominios)

Tma. de la aplicación de Riemann. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un dominio simplemente conexo t.q. $\Omega \neq \mathbb{C}$. Entonces $\exists$ una aplicación conforme $f: \Omega \to \mathbb{D}$ (esto es, f univalente en Ω, $f(\Omega)=\mathbb{D}$).

Si, para cierto punto $a \in \Omega$, pedimos que

$$f(a)=0, \quad f'(a)>0$$

(o, alternativamente, $\arg f'(a) = e^{it}$, para un $t \in \mathbb{R}$ fijo), entonces f es única.

f: la aplicación de Riemann de Ω sobre $\mathbb{D}$ (correspondiente al punto $a \in \Omega$).

Por supuesto, $\exists F: \mathbb{D} \to \Omega$ univalente también – la fcn inversa de f.

Demostración: L. Ahlfors: Complex Analysis (Cap. 6)

W. Rudin: Real and Complex Analysis (Cap. 14)

P. Duren: Univalent Functions (Cap. 1)

Idea: $\square$ Se considera la familia

$$\mathcal{F} = \{ f \text{ univalente en } \Omega : f(a)=0,\ f'(a)>0,\ f(\Omega) \subseteq \mathbb{D} \}.$$

Se demuestra que $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Obviamente, es una familia normal.

Se considera $M = \sup\{ f'(a) : f \in \mathcal{F} \}$, se demuestra que se alcanza (y, por tanto, es finito) para alguna función F (por el Tma. de Hurwitz): $F'(a)=M$.

Finalmente, se prueba que F es la aplicación conforme que se buscaba: $F(\Omega)=\mathbb{D}$. $\boxtimes$

- Hay que rellenar muchos detalles técnicos en la prueba, entre ellos el uso de un corolario del siguiente resultado.

Teorema (Hurwitz). Sea Ω un dominio en $\mathbb{C}$, $f_n \in H(\Omega)$ y supongamos que $\forall K \Subset \Omega$, $f_n \underset{K}{\rightrightarrows} f$. Entonces o bien $f \equiv 0$ o bien cada cero de f es un punto de acumulación de ceros de las funciones f_n. (Dicho de otra manera, para cada $a\in\Omega$ t.q. $f(a)=0$ y $\forall r>0$, podemos encontrar en $D(a;r)$ un cero de alguna f_n.)

Dem. □ Supongamos que $f\not\equiv 0$ y $f(a)=0$. Sea $r>0$ t.q. $\overline{D}(a;r)\subseteq\Omega$ y $f(z)\neq 0$ $\forall z\in C$, siendo $C=\partial\overline{D}(a;r)=\{z : |z-a|=r\}$. Sea $m=\min\{|f(z)| : z\in C\}$. Entonces $m>0$, al ser $|f|$ una función continua y C compacto.

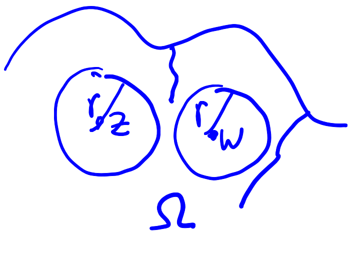
Por hipótesis, $f_n \underset{C}{\rightrightarrows} f$, luego $\exists N\in\mathbb{N}$ $\forall n\geq N$

$$|f(z)-f_n(z)|<m\leq|f(z)|,\ \forall z\in C.$$

Por el Tma. de Rouché, el número de ceros de f en $D(a;r)$ es igual al de $f-(f-f_n)=f_n$ en $D(a;r)$. Puesto que $f(a)=0$, f_n también tiene (al menos) un cero en $D(a;r)$, $\forall n\geq N$. (Hemos probado más de lo que se afirmaba.) ⊠

Corolario. Si las funciones f_n son univalentes en el dominio $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ y $f_n \underset{K}{\rightrightarrows} f$, $\forall K\Subset\Omega$, $n\to\infty$, entonces o bien f es univalente o bien es constante en Ω.

Dem. □ Supongamos lo contrario: $\exists\, z,w\in\Omega$ t.q. $z\neq w$ y $f(z)=f(w)=\alpha$, digamos. Si $f\equiv\alpha$, no hay nada que probar. Si $f\not\equiv\alpha$ en Ω, elegimos $r>0$ pequeño de manera que $\overline{D}(z;r),\overline{D}(w;r)\subseteq\Omega$ como en la prueba del Tma. de Hurwitz y $D(z;r)\cap D(w;r)=\emptyset$. Por la demostración de Hurwitz, $\exists N_1\in\mathbb{N}$ t.q. $\forall n\geq N_1$, en $D(z;r)$ hay ceros de $f_n-\alpha$ y $\exists N_2\in\mathbb{N}$ t.q. $\forall n\geq N_2$, en $D(w;r)$ tb. hay ceros de $f_n-\alpha$. Sea $N=\max\{N_1,N_2\}$. Entonces $\forall n\geq N$, $f_n-\alpha$ tiene un cero en $D(z;r)$ y otro en $D(w;r)$ $\Rightarrow$ tiene dos ceros distintos $\Rightarrow$ f_n no es univalente #. ⊠



Corolario. Si $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $\forall K \subset \Omega$, $f_n \underset{K}{\rightrightarrows} f$, $n \to \infty$ y, además, $\forall z \in \Omega$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n(z) \neq 0$, entonces o bien $f(z) \neq 0$, $\forall z \in \Omega$ o bien $f \equiv 0$.

(También se sigue de Hurwitz – ejercicio.)

- Ambos corolarios son útiles en muchas demostraciones.

LA CLASE S

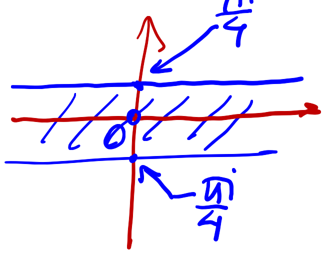
$S = \{ f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) : f$ univalente en $\mathbb{D}$, $f(0)=0$, $f'(0)=1 \}$, la clase de funciones univalentes normalizadas en $\mathbb{D}$.

Toda $f \in S$ tiene una serie de Taylor en $\mathbb{D}$ de la forma

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Ejemplos.

- $f(z) = z$
- $f(z) = \frac{1}{2} \log \frac{1+z}{1-z}$ $\qquad f : \mathbb{D} \to$



- $f(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + 4z^4 + \dots,$ (la función de Koebe). $f : \mathbb{D} \to$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 - \frac{1}{4}$.

- Gracias a las normalizaciones, podemos controlar el crecimiento, la derivada y los coeficientes de las $f \in S$.

Teorema de distorsión, $\forall f \in S$ y $\forall z \in \mathbb{D}$ (con $|z| = r$):

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \le |f'(z)| \le \frac{1+r}{(1-r)^3}.$$

Teorema de crecimiento. $\forall f \in S$ y $\forall z \in \mathbb{D}$ (con $|z| = r$)

$$\frac{r}{(1+r)^2} \le |f(z)| \le \frac{r}{(1-r)^2}.$$

- La función de Koebe da la igualdad (para ciertos z) en ambos teoremas.

Tma. de Bieberbach (1915) $\forall f \in S$, $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$, se tiene que $|a_2| \leq 2$.

Generalización (L. de Branges, 1985). $|a_n| \leq n$

- La igualdad se tiene para la fcn de Koebe (y otras relacionadas con ella) $\forall n \geq 2$ a la vez.

- Si $f \in S$ y definimos $g(z) = \sqrt{f(z^2)}$ de forma apropiada:

$f(z^2) = z^2 + a_2 z^4 + a_3 z^6 + \dots = z^2(1 + a_2 z^2 + a_3 z^4 + \dots) = z^2 \frac{f(z)}{z^2} \Rightarrow$ el segundo factor no tiene ceros en $\mathbb{D}$ (al ser $f(0)=0$ y f univalente, pues ambos lados tienen un cero doble en $z=0$), así que podemos definir $g(z) = z(1 + a_2 z^2 + a_3 z^4 + \dots)^{1/2} = z\left(\frac{f(z^2)}{z^2}\right)^{1/2}$ como fcn en $\mathcal{H}(\mathbb{D})$. g es impar, luego $g(-z) = -g(z)$.

Por tanto, si $z, w \in \mathbb{D}$ y $g(z) = g(w) \Rightarrow f(z^2) = f(w^2) \Rightarrow$ (f univalente) $z^2 = w^2 \Rightarrow w = \pm z$; pero $g(z) = g(w) = -g(z)$ $\Rightarrow g(z) = 0 \Rightarrow f(z^2) = 0 \Rightarrow z = w = 0$. Esto prueba que g es univalente, así que $g \in S$ también ($g(0)=0$; $g'(0)=1$).

g = transformación raíz cuadrada de f.

- De manera similar, la raíz quinta de una $f \in S$:

$$g(z) = f(z^5)^{1/5} = z\left(\frac{f(z^5)}{z^5}\right)^{1/5} = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n \in S.$$

Teorema (Prawitz, 1927). f univalente en $\mathbb{D} \Rightarrow f \in \bigcap_{0<p<\frac{1}{2}} H^p$.

(Véase Duren, Cap. 3).

Daremos una prueba de que $f \in H^{2/5}$ (y, por tanto, $f \in \bigcap_{0<p\leq\frac{2}{5}} H^p$), usando la raíz quinta.

Dem. □ Cada H^p es un espacio vectorial, luego $f \in H^p$
$\Leftrightarrow \dfrac{f - f(0)}{f'(0)} \in H^p$ (¡f univalente $\Rightarrow f'(0) \neq 0$!), así que podemos suponer que $f \in S$ en lugar de "f es univalente".

Sea g la raíz quinta de f, $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$, $b_1 = 1$.

$g'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n b_n z^{n-1}$. Relación de Parseval, ya visto antes cuando hablamos de $\|\cdot\|_{H^2}$: clase 9):

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right|^2 dm(z) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

Por tanto,
$$\int_0^{2\pi} |g'(re^{it})|^2 \frac{dt}{2\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |b_n|^2 r^{2n-2}$$

(TRUCO)
$$\Rightarrow (1-r)\int_0^{2\pi} |g'(re^{it})|^2 \frac{dt}{2\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} n |b_n|^2 r^{n-1} \cdot n(1-r) r^{n-1}.$$

Sea $u(r) = n(1-r) r^{n-1} \le 1$, $\forall r \in [0,1)$. Cálculo:
$\max u(r) = u\left(\frac{n-1}{n}\right) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} \le 1$. Por tanto:

$$(1-r)\int_0^{2\pi} |g'(re^{it})|^2 \frac{dt}{2\pi} \le \sum_{n=1}^{\infty} n |b_n|^2 r^{n-1}. \quad (*)$$

Observamos ahora que, para $\Omega_r = \{g(z) : |z| \le \sqrt{r}\}$, su área es:

$$\text{área}(\Omega_r) = \int_{\Omega_r} 1\, dA(z) \overset{g \text{ biyectiva}}{=} \int_{\{|z| \le \sqrt{r}\}} |g'(z)|^2 dx\,dy$$

(por ser el Jacobiano de g, $J_g = |g'|^2$)

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{r}} \left| \sum_{n=1}^{\infty} n b_n z^{n-1} \right|^2 \rho\, d\rho\, dt$$

[Fubini y de nuevo, Parseval]

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{r}} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |b_n|^2 \rho^{2n-2} \cdot \rho\, d\rho$$

$$= 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |b_n|^2 \frac{r^n}{2n} = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n |b_n|^2 r^n,$$

luego por ⊛ se sigue que

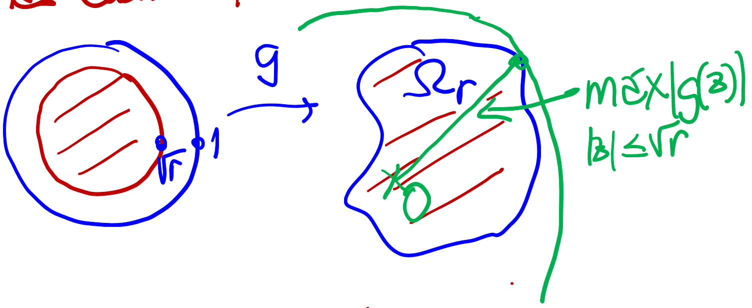
$$(1-r)\int_0^{2\pi} |g'(re^{it})|^2 \frac{dt}{2\pi} \leq \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 r^{n-1}$$

[cada punto se cubre ≤ 1 vez]

[No usaremos esta integral, sólo nos ha motivado para llegar a las cuentas que interesan.]

$$= \frac{1}{\pi r}\, \text{área}(\Omega_r)$$

g univalente



$$\leq \frac{1}{\pi r}\, \text{área}\ \overline{D}\Big(0, \max_{|z|\leq\sqrt{r}} |g(z)|\Big)$$

$$= \frac{1}{\cancel{\pi} r}\cdot \cancel{\pi} \max_{|z|\leq\sqrt{r}} |g(z)|^2$$

$$g(z) = z\left(\frac{f(z^5)}{z^5}\right)^{1/5} \Rightarrow$$

$$|g(re^{it})| = r\left(\frac{|f(r^5 e^{5it})|}{r^5}\right)^{1/5} = |f(r^5 e^{5it})|^{\frac{1}{5}}$$

$$\Rightarrow \max_{0\leq t\leq 2\pi} |g(\sqrt{r}e^{it})| = \max_{0\leq\theta\leq 2\pi} |f(r^{\frac{5}{2}} e^{i\theta})|^{\frac{1}{5}}$$

$$= \frac{1}{r} \max_{0\leq\theta\leq 2\pi} |f(r^{\frac{5}{2}} e^{5i\theta})|^{\frac{2}{5}}$$

$$\leq \frac{1}{r}\left[\frac{r^{\frac{5}{2}}}{(1-r^{\frac{5}{2}})^2}\right]^{\frac{2}{5}}$$

(Tma. de la distorsión)

$$= \frac{1}{(1-r^{5/2})^{4/5}} \leq \frac{1}{(1-r)^{4/5}},$$

Integrando desde $r=0$ hasta $r=1$ la desigualdad intermedia:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 r^{n-1} \leq \frac{1}{(1-r)^{4/5}},$$

obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 r^{n-1} dr \leq \int_0^1 (1-r)^{-\frac{4}{5}} dr = \frac{1}{\frac{1}{5}} = 5.$$

Finalmente, $\forall r\in[0,1)$

(Personal: no importa si es e^{it} ó e^{5it})

$$M_{\frac{2}{5}}^{\frac{2}{5}}(r^5; f) = \int_0^{2\pi} |f(r^5 e^{it})|^{\frac{2}{5}} \frac{dt}{2\pi} = \int_0^{2\pi} |g(re^{it})|^2 \frac{dt}{2\pi}$$

$$= M_2^2(r; g) = \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 r^{2n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 \leq 5$$

$\Rightarrow f\in H^{\frac{2}{5}}$. $\boxtimes$

$(\Rightarrow g\in H^2)$

Tma. Si f es univalente en $\mathbb{D}$, entonces su factor singular es $S(z)\equiv 1$ y su factor de Blaschke, B, es de grado ≤ 1.

Dem. □ $gr(B)\leq 1$ es obvio pq. $gr(B)\geq 2 \Rightarrow f$ tiene 2 ceros en $\mathbb{D}$, #.
En cuanto al resto, $\exists$ dos posibilidades.

1) $\forall z\in\mathbb{D}$, $f(z)\neq 0$. Entonces tb. $\frac{1}{f}\in H(\mathbb{D})$ y es obviamente univalente, luego $\frac{1}{f}\in H^p$, $\forall p<\frac{1}{2}$. La factorización canónica de f es SF y la de $\frac{1}{f}=S_1F_1$ (ninguna tiene ceros $\Rightarrow$ no hay factor de Blaschke) $\Rightarrow SS_1FF_1\equiv 1 \Rightarrow S\equiv S_1\equiv 1$, porque

$$S(z)=e^{-\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\mu(t)}$$ con $\mu\nearrow$ y singular, similar para S_1,μ_1

$\Rightarrow$ sólo es posible si $\mu\equiv 0\equiv\mu_1$. (No es así para F, F_1.)

2) Si $\exists a\in\mathbb{D}$ t.q. $f(a)=0$, es fácil ver que la función

$$g(z)=f\left(\frac{z+a}{1+\bar{a}z}\right)\Big/\left[(1-|a|^2)f'(a)\right] \in S$$ (univalente,

$$g(0)=\frac{f(a)}{(1-|a|^2)f'(a)}=0,$$ etc.).

Por el Tma. de crecimiento para la clase S,

$$|g(z)|\geq\frac{r}{(1+r)^2} \Rightarrow \left|\frac{g(z)}{z}\right|\geq\frac{1}{(1+r)^2}>\frac{1}{4} \quad (r<1).$$

En otras palabras, $$\left|\frac{z}{f\left(\frac{z+a}{1+\bar{a}z}\right)}\right| < 4(1-|a|^2)|f'(a)|=C<\infty,$$

Poniendo $\frac{z+a}{1+\bar{a}z}=w$ (automorfismo del disco), obtenemos

$$z=\frac{w-a}{1-\bar{a}w}=B(w) \Rightarrow \forall w\in\mathbb{D} \quad \left|\frac{B(w)}{f(w)}\right|<C \Rightarrow \frac{B}{f}\in H^\infty.$$

Se sigue que el factor singular de f es $\equiv 1$, de nuevo; si fuera otro, S, $\frac{B}{f}$ tendría como factor singular $\frac{1}{S}$, lo cual es imposible (por las propiedades de la fcn singular μ). ⊠

$(-\mu\nearrow,\ \mu\nearrow \Rightarrow \mu=0)$