(20) J, 22/04/2021

Consecuencias importantes del Tma. de Fatou

• Recordemos que toda $f\in h^1$ tiene límites radiales en c.t.p. de $\mathbb{T}$ y $f=u+iv\in H^1 \Leftrightarrow u,v\in h^1$. Por tanto, toda $f\in H^1$ tiene límites radiales en c.t.p. de $\mathbb{T}$. $H^\infty\subseteq H^1 \Rightarrow$ toda $f\in H^\infty$ tiene límites radiales en c.t.p.

• $N=\{f\in \mathcal{H}(\mathbb{D}) : \exists g,h\in H^\infty \text{ con } f=\frac{g}{h}\}$ (Tma. de F. y R. Nevanlinna). Junto con el Teorema de unicidad de los límites radiales, esto $\Rightarrow$ toda $f\in N$ tiene límites radiales en c.t.p.; $N\supseteq \bigcup_{0<p\le\infty} H^p \Rightarrow \forall p\in(0,\infty]$, toda $f\in H^p$ tiene límites radiales en c.t.p. de $\mathbb{T}$.

FACTORIZACIÓN CANÓNICA EN H^p

• El Tma. de Riesz nos dice que si $p>0$, $f\in H^p$ y $f\not\equiv 0$ en $\mathbb{D}$, entonces $f=Bg$, donde B es el producto de Blaschke asociado con los ceros de f, $g\in H^p$, $g(z)\neq 0$, $\forall z\in\mathbb{D}$ y $\|f\|_p=\|g\|_p$.
Sabemos, además, para $f^*(e^{it})=\lim_{r\to 1^-} f(re^{it})$ (en c.t.p. $e^{it}\in\mathbb{T}$) que $f^*\in L^p(\mathbb{T})$ y $\log|f^*|\in L^1(\mathbb{T})$.
Nuestro objetivo es detallar más la factorización, descomponiendo g como producto de factores de cierto tipo.

• Para $z=re^{i\theta}\in\mathbb{D}$, sea

$$F(z)=e^{\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log|f^*(e^{it})|\,dm(t)}.$$

Puesto que $\log|f^*|\in L^1(\mathbb{T})$, el exponente se puede escribir como serie de potencias con los coeficientes acotados:

$$\underbrace{\int_0^{2\pi}\log|f^*(e^{it})|\,dm(t)}_{\in L^1(\mathbb{T},dm)}+\sum_{n=1}^{\infty}2\underbrace{\int_0^{2\pi}e^{-int}\log|f^*(e^{it})|\,dm(t)}_{\text{integrales acotadas por } \|\log|f^*|\|_{L^1(\mathbb{T})}}\cdot z^n.$$

Por tanto, la serie de potencias del exponente converge, al menos, en $\mathbb{D}$, así que $F \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$.

- $f = Bg \Rightarrow |f^*| = |g^*|$ en c.t.p. de $\mathbb{T}$. Por la desigualdad logarítmica para los valores frontera de las funciones H^p (clase 17), obtenemos $\forall z \in \mathbb{D}$:

$$|g(z)| \leq e^{\int_0^{2\pi} P(r,\theta-t) \log |g^*(e^{it})| \, dm(t)}$$

$$= e^{\int_0^{2\pi} P(r,\theta-t) \log |f^*(e^{it})| \, dm(t)}$$

$$= e^{\mathrm{Re}\left\{ \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} \log |f^*(e^{it})| \, dm(t) \right\}}$$

$$= |F(z)|.$$

- Por un Corolario del Tma. de Fatou, si $\varphi \in L^1(\mathbb{T}, dm)$ y

$$u(z) = \int_0^{2\pi} P(r,\theta-t) \varphi(t) \, dm(t), \quad \forall z = re^{i\theta} \in \mathbb{D},$$

entonces

$$\varphi(\theta) = \lim_{r \to 1^-} u(re^{i\theta}) \quad \text{en c.t.p. } \theta \in [0, 2\pi].$$

Aplicando este hecho a la fcn $\varphi(t) = \log |g^*(e^{it})|$, obtenemos que

$$\log |g^*(e^{i\theta})| = \lim_{r \to 1^-} \int_0^{2\pi} P(r,\theta-t) \log |g^*(e^{it})| \, dm(t)$$

$$= \lim_{r \to 1} \log |F(re^{i\theta})| = \log |F^*(e^{i\theta})|,$$

en c.t.p. $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$. Por tanto, $|g^*| = |F^*|$ en c.t.p. de $\mathbb{T}$.

- Sea $\lambda = \dfrac{g(0)}{|g(0)|}$. Entonces $|\lambda| = 1$ y la función

$$S \stackrel{\text{defn}}{=} \frac{\overline{\lambda} g}{F} \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) \qquad (F(z) \neq 0, \ \forall z \in \mathbb{D})$$

y tiene las siguientes propiedades:

- $0<|S(z)|\leq 1$ en $\mathbb{D}$;
- $|S^*(e^{i\theta})|=1$ en c.t.p. de $\mathbb{T}$;
- $S(0)=\dfrac{|g(0)|}{F(0)}>0$ $\quad \left(F(0)=e^{\int_0^{2\pi}\log|f^*(e^{it})|\,dm(t)}>0\right).$

Por tanto, $-\log|S|=\mathrm{Re}\{-S\}\in h(\mathbb{D})$, $-\log|S|\geq 0$ en $\mathbb{D}$,

$-\log|S^*|=0$ en c.t.p. de $\mathbb{T}$.

Tma. de representación de Herglotz $\Rightarrow -\log S(z)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,d\mu(t)$, (*)

para cierta $\mu\nearrow$, $\mu\in BV[0,2\pi]\Rightarrow$ acotada en $[0,2\pi]$. Además, sabemos que μ es única y

$\mu\nearrow\ \Rightarrow \exists\,\mu'(t)$ en c.t.p. $t\in[0,2\pi]$.

Por el Tma. de Fatou, en c.t.p. de $\mathbb{T}$:

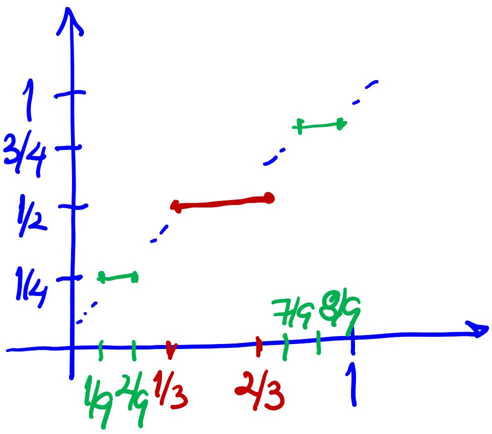
$$0=-\log|S^*(e^{it})|=\mu'(t)$$

Recordatorio: • $f\in AC[a,b]\Leftrightarrow f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)\,dt,\ \forall x\in[a,b]$. Por tanto, si $f\in AC[a,b]$ y $f'(t)=0$ en c.t.p. $t\in[a,b]$, $f(x)=f(a)=$ cte en $[a,b]$.

• Sin embargo, existen funciones $\nearrow$ y acotadas en $[a,b]$ t.q. $\mu\notin AC[a,b]$, $\mu'(t)=0$ c.t.p. de $[a,b]$ y $\mu\not\equiv$ cte. Son las llamadas funciones singulares.

Ejemplo. (Función de Cantor)

$$\mu(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & \text{si } t\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]\\ \frac{1}{4}, & \text{si } t\in\left[\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right]\\ \frac{3}{4}, & \text{si } t\in\left[\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right]\\ \text{etc.}\end{cases}$$



$\left(\mu\nearrow,\ \mu'(t)=0 \text{ en c.t.p.},\ \mu\not\equiv\text{cte.}\right)$
μ acotada

⊛ $\Rightarrow$ $S(z) = e^{-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\, d\mu(t)}$, $\forall z \in \mathbb{D}$.

De la def'n de S: $S = \frac{\lambda g}{F}$, obtenemos la fórmula $g = \lambda S F$.
Junto con $f = Bg$, esto implica $f = \lambda B S F$.
S = factor singular interno ; F = factor externo (de f)
(terminología de Beurling; luego mencionaremos su teorema).

Def'n. Una función $f \in H(\mathbb{D})$ se llama interna si $\forall z \in \mathbb{D}, |f(z)| \le 1$
y $|f^*(e^{it})| = 1$ en c.t.p. $t \in [0, 2\pi]$.
Una función interna, S, se denomina fcn singular interna
si tiene la forma
$$S(z) = e^{-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\, d\mu(t)}$$
para una fcn singular μ.
F es una función externa de H^p ($p>0$) si tiene la forma
$$F(z) = \lambda e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} \log \psi(t)\, dt},$$
para cierta constante λ con $|\lambda| = 1$ y cierta $\psi \ge 0$ en $[0, 2\pi]$
y t.q. $\log|\psi| \in L^1(\mathbb{T})$, $\psi \in L^p(\mathbb{T})$. (incorporamos el factor λ en F)

(En el análisis llevado a cabo arriba, partiendo de una f fija en H^p, $\psi = |f^*|$: $\log \psi \in L^1(\mathbb{T})$, $\psi \in L^p(\mathbb{T})$.)

Teorema (Smirnov, 1929). Sea $p > 0$ y $f \in H^p$, $f \not\equiv 0$. Entonces f tiene factorización única $f = BSF$, donde B es el producto de Blaschke asociado con los ceros de f, S es una función singular interna y F es una función externa de H^p, con $\psi(t) = |f^*(e^{it})|$ para c.t.p. $t \in [0, 2\pi]$. Recíprocamente, todo producto BSF del tipo descrito es una función H^p.

Corolario. Toda función interna puede factorizarse como $f=BS$.

Dem. del Tma. □ • Nuestro análisis prueba que $f\in H^p$, $f\neq 0 \Rightarrow$ $f=BSF$, siendo $\psi=|f^*|$ en c.t.p.

• Veamos la unicidad: si $B_1S_1F_1=B_2S_2F_2$, entonces los ceros del lado izquierdo coinciden con los ceros del lado derecho $\Rightarrow$ $B_1=B_2 \Rightarrow S_1F_1=S_2F_2 \Rightarrow$

$$\lambda_1\overline{\lambda_2}\, e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\left[\log\frac{\psi_1(t)}{\psi_2(t)}\,dt-d(\mu_1(t)-\mu_2(t))\right]}\equiv 1,\ \forall z\in\mathbb{D}$$

$$\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2,\ \log\frac{\psi_1(t)}{\psi_2(t)}\,dt=d(\mu_1(t)-\mu_2(t)) \text{ en c.t.p.}$$

$$\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2,\ \psi_1(t)=\psi_2(t),\ \mu_1=\mu_2 \text{ en c.t.p.}$$

(gracias a la descomposición de Lebesgue que repasaremos enseguida). $\Rightarrow F_1=F_2,\ S_1=S_2.$

• Sólo queda por probar el recíproco: si $f=BSF$, donde B, S, F son como antes, entonces $f\in H^p$.

Puesto que $|BS|\leq 1$ en $\mathbb{D}$, basta comprobar que $F\in H^p$. Por la desigualdad aritmético-geométrica (clase 11), obtenemos

$$|F(z)|^p = e^{p\,\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log\psi(t)\,dt\right\}}$$

$$= e^{\int_0^{2\pi}\log\psi(t)^p\,\underbrace{P(r,\theta-t)\frac{dt}{2\pi}}_{\text{medida unitaria}}}$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi(t)^p\,P(r,\theta-t)\frac{dt}{2\pi}.$$

Fubini $\Rightarrow$
$$\int_0^{2\pi}|F(re^{i\theta})|^p\,d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{2\pi}\psi(t)^p P(r,\theta-t)\frac{dt}{2\pi}\right]d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\psi(t)^p\,dt,\quad \forall r\in[0,1).$$

Tomando $\sup\limits_{0\le r<1}$, obtenemos $\|F\|_{H^p} \le \|\psi\|_{L^p(\mathbb{T})}$. ⊠

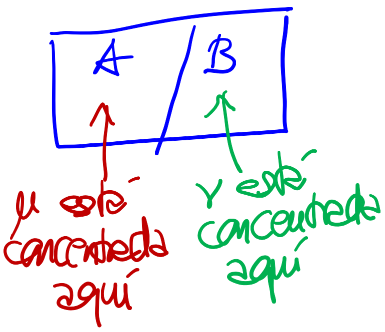
<u>Dem. del Corolario.</u> □ Si f es interna y $f=BSF$, vemos que $f\in H^\infty$, $\log|f^*|=\log 1=0$ en c.t.p. $\Rightarrow |f^*|=1$ en c.t.p.
$|B^*S^*|=1$ en c.t.p. $\Rightarrow |F^*|=1$ en c.t.p. $\Rightarrow \log\psi=\log|F^*|=0$ en c.t.p. $\Rightarrow$

$$F(z)=e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\underbrace{\log\psi(t)}_{=0,\text{c.t.p.}}\,dt}\equiv 1 \text{ en } \mathbb{D} \Rightarrow f\equiv BS. \ ⊠$$

Breve repaso de medidas

Sea X un espacio de medida (con su σ-álgebra) y con 2 medidas positivas, μ y ν.

Por defn, μ y ν son <u>mutuamente singulares</u> (<u>notación</u>: $\mu\perp\nu$) si $\exists A,B\subseteq X$ (medibles) t.q. $A\cap B=\emptyset$, $A\cup B=X$ y $\nu(A)=\mu(B)=0$



ν es <u>absolutamente continua</u> respecto a μ (<u>notación</u>: $\nu\ll\mu$) si $\forall A$, $\mu(A)=0\Rightarrow\nu(A)=0$.

<u>Tma. (Radon–Nikodym)</u> Si μ es una medida σ-finita en X y ν es otra medida positiva (definida en la misma σ-álgebra de X) t.q. $\nu\ll\mu$, entonces $\exists f: X\to[0,\infty)$ medible t.q. $\forall E$ medible, $\nu(E)=\int_E f\,d\mu$. (<u>Notación</u>: $f=\frac{d\nu}{d\mu}$, <u>derivada R-N</u>.)

f es única en el siguiente sentido: si g tiene las mismas propiedades, entonces $f=g$ en μ-c.t.p.

<u>Corolario (descomposición de Lebesgue).</u> Si μ y ν son dos medidas σ-finitas en X. Entonces $\exists!$ medida $\nu_0\perp\mu$, $\exists!$ medida $\nu_1\ll\mu$ t.q. $\nu=\nu_0+\nu_1$.

Ejemplo. En la factorización canónica, ha aparecido la integral

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\left[\log|f^*(e^{it})|dt-d\mu(t)\right].$$

Sea $d\nu(t)=\underbrace{\log|f^*(e^{it})|dt}_{d\nu_1(t)}-d\mu(t)$. Sabemos que

$\int_0^{2\pi}\left|\log|f^*(e^{it})|\right|dt<\infty$, $\int_0^{2\pi}d\mu(t)=V_0^{2\pi}(\mu)<\infty \Rightarrow \nu$ es una medida finita.

Sea m la medida de Lebesgue normalizada: $dm(t)=\frac{dt}{2\pi}$.

Es fácil ver que, para $E\subseteq\mathbb{T}$, $m(E)=0\Rightarrow\int_E\log|f^*(e^{it})|dt=0$,

luego $\nu_1\ll m$, donde $d\nu_1(t)=\log|f^*(e^{it})|dt$.

También es fácil ver que, si definimos la medida ν_0 asociada a la fcn μ como $\nu_0(I)=\int_I d\mu(t)$ para cada intervalo I y luego extendemos ν_0 a todos los conjuntos de Borel, entonces $\nu_0\perp m$:

si $\mu'(t)=0$, $\forall t\in[0,2\pi]\setminus E$, con $m(E)=0$, entonces

$\nu_0([0,2\pi]\setminus E)=\int_{[0,2\pi]\setminus E}d\mu(t)=0$, mientras que $m(E)=0$

y $E\cup([0,2\pi]\setminus E)=[0,2\pi]$, $E\cap([0,2\pi]\setminus E)=\emptyset$.

Por tanto:
fcn singular $\longleftrightarrow$ medida singular (resp. a m).
(similar) $\to$ fcn $AC[0,2\pi]$ $\longleftrightarrow$ medida absolutamente continua (resp. a m).

(Esta identificación se usa a menudo en el Libro de Duren de espacios de Hardy, sin explicaciones.)

- Otro texto de consulta para las medidas: Royden, Real Analysis, MacMillan.

Ejemplos de funciones internas y externas.

(1.) $S(z)=e^{-\frac{1+z}{1-z}}=e^{\frac{z+1}{z-1}}$, $z\in\mathbb{D}$.

Ya sabemos que $|S(z)|<1$ en $\mathbb{D}$ y $|S^*(e^{it})|=1$, $\forall t\in(0,2\pi)$.

(NO en $t=0$)

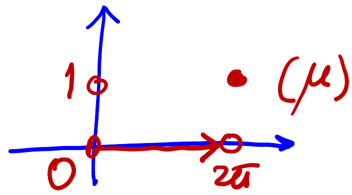
Por tanto, S es interna. De hecho, es singular interna: si consideremos la medida $\tilde{\mu}=\delta_{\{1\}}$: $\tilde{\mu}(E)=\begin{cases}0, & \text{si } 1\notin E\\ 1, & \text{si } 1\in E\end{cases}$ ($E\subseteq\mathbb{T}$ medible),

correspondiente a la función monótona

$$\mu(t)=\begin{cases}0, & 0\le t<2\pi\\ 1, & t=2\pi\end{cases}$$

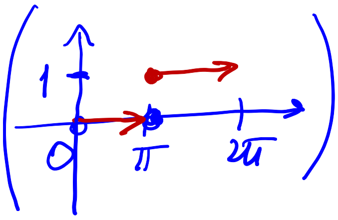
y singular, vemos que $\tilde{\mu}$ es una medida singular (resp. a m) con un sólo átomo: $1\in\mathbb{T}$ (visto como $2\pi\in[0,2\pi]$; $e^{2\pi i}=1$).

$$S(z)=e^{-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,d\mu(t)}=e^{-\frac{1+z}{1-z}}.$$



(Esto explica el nombre "fcn singular interna atómica".)

- Otra función muy similar es $S(z)=e^{-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,d\mu(t)}=e^{\frac{z-1}{z+1}}$,

con $\mu(t)=\begin{cases}0, & 0\le t<\pi\\ 1, & \pi\le t\le 2\pi\end{cases}$ () y $\tilde{\mu}(E)=\begin{cases}0, & \text{si } -1\notin E\\ 1, & \text{si } -1\in E\end{cases}$.

2. Toda función $F\in\mathcal{H}(\mathbb{D})$ con $\operatorname{Re}F(z)>0$, $\forall z\in\mathbb{D}$, es externa para H^p, si $F\in H^p$. (Puede verse que $0<p<1\Rightarrow F\in H^p$; p.ej. $\ell(z)=\frac{1+z}{1-z}$ tiene esta propiedad y $\ell\notin H^1$.)

Por ejemplo, $F(z)=1+z$ cumple $\operatorname{Re}F(z)\geq 1+\operatorname{Re}z>0$, para $z\in\mathbb{D}$. $F\in H^\infty$ ya que $|F(z)|\le 1+|z|<2$, $\forall z\in\mathbb{D}$.

$\log(1+z)\in\mathcal{H}(\mathbb{D})$ (existe una determinación analítica, p.ej., con $\log 1=0$.

Entonces $F(z)=e^{\log(1+z)}$; $\log\psi(e^{it})=\log|F^*(e^{it})|$.

$$\log|F^*(e^{it})|=\operatorname{Re}\{\log(1+e^{it})\}=\log|1+e^{it}|=\log\sqrt{2+2\cos t}$$
$$=\tfrac12\log 2(1+\cos t)=\tfrac12\log\left(4\cos^2\tfrac t2\right)\in L^1[0,2\pi]$$

¡comprobar! (Hoja 2-B)

Ejercicio. Sea $F \in H^1$. Entonces F es externa para $H^1 \Leftrightarrow$

$$\log|F(0)| = \int_0^{2\pi} \log|F^*(e^{it})| \frac{dt}{2\pi}.$$

(Hoja 2-B)

• Del Tma. de Smirnov y el Tma. de F. y R. Nevanlinna se puede deducir el siguiente resultado general.

Tma. (Smirnov). Si $f \in N$, $f \not\equiv 0$, entonces $f = B\frac{S_1}{S_2}F$, siendo B un producto de Blaschke, S_1 y S_2 dos funciones singulares internas y F una fcn externa para N:

$$F(z) = e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} \log\varphi(t)\,dt}, \text{ con } \varphi \geq 0 \text{ y } \log\varphi \in L^1[0,2\pi].$$

La factorización es única y el recíproco es cierto.

SUBESPACIOS INVARIANTES

• Sea X un espacio de Banach y $T \in \mathcal{B}(X)$, un operador lineal y acotado en X. Sea M un subespacio cerrado de X (esto es un subespacio de Banach de X). Diremos que M es un subespacio invariante (por T) de X (o subespacio T-invariante) $\Leftrightarrow$ M es un subespacio invariante (por T) si $T(M) \subseteq M$. Si $M \neq \{0\}, X$, diremos que es un subespacio invariante no trivial.

Es un problema importante (y todavía abierto) si, en un espacio de Hilbert separable, todo T acotado tiene un subespacio invariante no trivial. En algunos espacios de Banach (no Hilbert) se conocen contraejemplos desde los años 70/80. Existen también muchos resultados positivos: si T es compacto o conmuta con un operador compacto, entonces tiene subespacios invariantes no triviales.

Otro problema importante es, dado un cierto operador, caracterizar todos sus subespacios invariantes. Es aquí donde las funciones internas han encontrado su aplicación.

Recordemos: $H^2 \cong \ell^2$; $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \longleftrightarrow (a_n)_{n=0}^{\infty}$; $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 = \|f\|_{H^2}^2$.

Def'n. En ℓ^2, definimos el operador de desplazamiento (unilateral directo) $S: \ell^2 \to \ell^2$ como sigue:

$$S(a_0, a_1, a_2, \dots) = (0, a_0, a_1, a_2, \dots).$$

Terminología en inglés: (unilateral forward) shift operator.

Observaciones.
- $S(\ell^2) \subseteq \ell^2$: obvio.
- S es lineal: trivial.
- S está acotado y es isométrico:

$\|S(a_n)_n\|_{\ell^2} = \|(a_n)_n\|_{\ell^2}$, también obvio.

- No es sobreyectivo (por tanto, no es unitario), también es evidente.

- Interpretación en H^2:

$$(0, a_0, a_1, a_2, \dots) \leftrightarrow a_0 z + a_1 z^2 + a_2 z^3 + \dots$$
$$= z(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots)$$

Por tanto, en H^2:
$$Sf(z) = zf(z),$$

operador de multiplicación por z.

Subespacios invariantes obvios:
$$M = \{(a_n)_{n=0}^{\infty} : a_0 = a_1 = \dots = a_N = 0\} \subseteq \ell^2.$$

Se corresponden con $M = \{f \in H^2 : f(0) = f'(0) = \dots = f^{(N)}(0) = 0\}$
$= \{f \in H^2 : f(z) = z^N g(z),\ g \in H^2\}$.

(Veremos más.)