- **Fórmula de Jensen para el disco unidad (1899):**

$f\in H(\mathbb{D})$, $0<r<1$, $\{z\in\overline{D}(0;r): f(z)=0\}=\{a_1,a_2,\dots,a_N\}$ (repitiendo en la lista cada a_j tantas veces cuanto vale su multiplicidad), $f(0)\neq 0$:

$$\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|\frac{d\theta}{2\pi}=\log|f(0)|+\sum_{n=1}^{N}\log\frac{r}{|a_n|}. \qquad (J)$$

Tma. Para $f\in H^\infty$, $f\not\equiv 0$, consideremos

$$M_r(f)=\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|\frac{d\theta}{2\pi}, \quad 0<r<1,$$

$$M^*(f)=\int_0^{2\pi}\log|f^*(e^{i\theta})|\frac{d\theta}{2\pi},$$

donde $f^*(e^{i\theta})=\lim_{r\to 1^-}|f(re^{i\theta})|$ (en c.t.p. θ resp. a $dm(\theta)=\frac{d\theta}{2\pi}$).

Entonces:

a) $0<r<s<1 \Rightarrow M_r(f)\le M_s(f)$;

b) $\lim_{r\to 0^+} M_r(f)=\log|f(0)|$;

c) $\forall r\in(0,1)$, $M_r(f)\le M^*(f)$.

Dem. $\square$ a) Sea m la multiplicidad del (posible) cero de f en $z=0$: $f(z)=z^m g(z)$. Por un razonamiento ya visto antes (Lema, p.5, Clase 5), $g\in H^\infty$ (con $\|g\|_\infty\le\|f\|_\infty$); además, $g(0)\neq 0$ y los restantes ceros de f son los ceros de g.

Aplicando la fórmula de Jensen (J) a g en lugar de f, observamos que $\log|g(0)|+\sum_{n=1}^{N}\log\frac{r}{|a_n|}$ crece cuando r crece, así que lo mismo ocurre con el lado izquierdo de (J):

$$0<r<s<1 \Rightarrow M_r(g)\le M_s(g).$$

$M_r(f) = \int_0^{2\pi} \log\left(r^m |g(re^{i\theta})|\right) \frac{d\theta}{2\pi} = M_r(g) + m\log r$. Por tanto,

$$0<r<s<1 \Rightarrow M_r(f) \leq M_s(f).$$

b) Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $|f(z)| \leq 1$. (Para f arbitraria, $g = \frac{f}{\|f\|_\infty}$ satisface $|g(z)| \leq 1$ y, si

$\lim\limits_{r\to 0^+} M_r(g) = \log|g(0)|$, entonces

$$\log|f(0)| - \log\|f\|_\infty = \log|g(0)| = \lim_{r\to 0^+} M_r(g)$$
$$= \lim_{r\to 0^+} \int_0^{2\pi} \left(\log|f(re^{i\theta})| - \log\|f\|_\infty\right) \frac{d\theta}{2\pi} = \lim_{r\to 0^+} M_r(f) - \log\|f\|_\infty$$

$$\Rightarrow \log|f(0)| = \lim_{r\to 0^+} M_r(f).$$

Con frecuencia, usaremos la notación abreviada
$$\int_{\mathbb{T}} g\, dm = \int_0^{2\pi} g(e^{i\theta})\, dm(\theta) = \int_0^{2\pi} g(e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Escribiendo $f_r(e^{i\theta}) = f(re^{i\theta})$, $0 \leq r < 1$, observamos que $f_r(e^{i\theta}) \to f(0)$, $r \to 0^+$. Aplicando el Lema de Fatou a la desigualdad $M_r(f) \leq M_s(f) \Leftrightarrow \int_{\mathbb{T}} \log|f_r|\, dm \leq \int_{\mathbb{T}} \log|f_s|\, dm$, para $0<r<s<1$, con s fijo, obtenemos

$$(*) \quad \log|f(0)| = \int_{\mathbb{T}} \log|f(0)|\, dm \leq \liminf_{r\to 0^+} \int_{\mathbb{T}} \log|f_r|\, dm \leq \int_{\mathbb{T}} \log|f_s|\, dm < \infty.$$

Por hipótesis, $|f_r| \leq 1 \Rightarrow \log\frac{1}{|f_r|} \geq 0$. Para $0<r<s<1$, se sigue que
$$\int_{\mathbb{T}} \log\frac{1}{|f_r|}\, dm \geq \int_{\mathbb{T}} \log\frac{1}{|f_s|}\, dm.$$

Sea $\limsup\limits_{r\to 0^+} \int_{\mathbb{T}} \log|f_r|\, dm = \lim\limits_{n\to\infty} \int_{\mathbb{T}} \log|f_{r_n}|\, dm$, donde $r_n \searrow 0$.

Sean $s_n > r_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$. Entonces

$$-\limsup_{r\to 0^+} \int_{\mathbb{T}} \log|f_r|\,dm = \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{T}} \log\frac{1}{|f_{r_n}|}\,dm \geq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{T}} \log\frac{1}{|f_{s_n}|}\,dm$$

(Fatou) $$\geq \int_{\mathbb{T}} \log\frac{1}{|f(0)|}\,dm = -\log|f(0)|$$

$$\Rightarrow \limsup_{r\to 0^+} \int_{\mathbb{T}} \log|f_r|\,dm \leq \log|f(0)|. \quad (**)$$

(*) y (**) $\Rightarrow \log|f(0)| \leq \liminf_{r\to 0^+} \int_{\mathbb{T}} \log|f_r|\,dm \leq \limsup_{r\to 0^+} \int_{\mathbb{T}} \log|f_r|\,dm \leq \log|f(0)|$

$$\Rightarrow \exists \lim_{r\to 0^+} \int_{\mathbb{T}} \log|f_r|\,dm = \lim_{r\to 0_+} M_r(f) = \log|f(0)|.$$

c) De manera similar, basta considerar sólo el caso $|f|\leq 1$.
Recordando que $f^*(e^{i\theta}) = \lim_{r\to 1^-} f(re^{i\theta})$ en casi todo $e^{i\theta}\in\mathbb{T}$
(Tma. de Fatou), obtenemos que $f^* = \lim_{r\to 1^-} f_r$ en c.t.p. El resto es análogo al aptdo. b), considerando $\lim_{r\to 1^-}$ en lugar de $\lim_{r\to 0^+}$. $\boxtimes$

Corolario. $f\in H^\infty$, $f\not\equiv 0 \Rightarrow \log|f^*| \in L^1(\mathbb{T})$. Por consiguiente, $f^*(e^{i\theta}) \neq 0$, en c.t.p. $e^{i\theta}\in\mathbb{T}$.

• Observación. Esto implica el resultado probado el otro día: si $\exists$ arco $J\subseteq\mathbb{T}$ t.q. $f|_J = 0$ en c.t.p. $\Rightarrow f\equiv 0$ en $\mathbb{D}$.

Dem. □ Puesto que $f\not\equiv 0$, $\exists r\in(0,1)$ t.q. $f(z)\neq 0$ $\forall z$ con $|z|=r$ (por el Teorema de la unicidad). Según el aptdo. c) de Tma. anterior, entonces

$$-\infty < \int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|\frac{d\theta}{2\pi} = M_r(f) \leq M^*(f) = \int_0^{2\pi} \log|f^*(e^{i\theta})|\frac{d\theta}{2\pi} \leq \log\|f^*\|_\infty < \infty.$$

Por tanto, $\log|f^*| \in L^1(\mathbb{T}) \Rightarrow |\log|f^*|| \in L^1(\mathbb{T}) \Rightarrow \log|f^*|$ sólo puede tomar el valor $-\infty$ en un conjunto de medida nula. $\boxtimes$

- Para entender los ceros de las funciones en H^∞ y en N (y, como veremos, en todos los espacios intermedios H^p, $0<p<\infty$), necesitaremos ciertos conocimientos de productos infinitos.

REPASO: Productos infinitos (1ª parte: productos numéricos)

- Productos infinitos de números reales: P.L. Duren: Invitation to Classical Analysis, AMS, 2012. (Cap. 5)
- Productos infinitos de números complejos: L.V. Ahlfors: Complex Analysis, McGraw-Hill, 1987. (Cap. 5, sección 2), W. Rudin: Real and Complex Analysis, McGraw-Hill. (Cap. 15), John B. Conway: Functions of One Complex Variable I, Springer, 1978. (Cap. VII, sección 5).

- Conceptos básicos

- Sean p y p_n, $n\in\mathbb{N}$, números complejos. Parece razonable proclamar que el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ converge al valor p (finito) si existe $\lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} p_n$ y $\lim \prod_{n=1}^{N} p_n = p$.

- Obviamente, si un $p_k=0$, entonces $\prod_{n=1}^{\infty} p_n = 0$, sin que importe el comportamiento del resto de los términos del producto. Por otra parte, interesa construir productos infinitos de funciones analíticas, con lo cual es conveniente admitir ceros (de multiplicidad finita). Por ello, es razonable permitir que un número finito de factores sea $=0$. Adoptaremos, pues, la siguiente

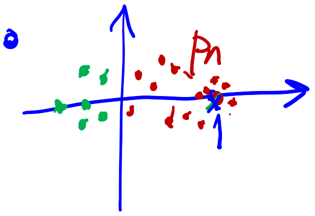
Definición. El producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ converge si el conjunto $E=\{n\in\mathbb{N}: p_n=0\}$ es finito y existe

$$\lim_{N\to\infty} \prod_{n\in\{1,\dots,N\}\setminus E} p_n = p, \qquad p\notin\{0,\infty\}.$$

• Si los $p_n \neq 0$, entonces $p_N = \dfrac{\prod_{n=1}^{N} p_n}{\prod_{n=1}^{N-1} p_n} \longrightarrow \dfrac{P}{P} = 1$, $N \to \infty$ $(P \neq 0, \infty)$, en analogía con las series infinitas, donde $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge $\Leftarrow$ $a_n \to 0$, $n \to \infty$.

Por ello se suele escribir $p_n = 1 + a_n$ y $\prod_{n=1}^{\infty} p_n = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$, siendo $a_n \to 0$ condición necesaria (pero no suficiente) para la convergencia del producto.

•



Si $p_n \to 1$, $n \to \infty$, $\exists N \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq N$ $\operatorname{Re} p_n > 0$. Por tanto, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que los valores de $\log p_n$ estén bien definidos (como valores de, p.ej., la determinación principal del logaritmo holomorfo: $\operatorname{Log} z = \log|z| + i \operatorname{Arg} z$, $-\pi < \operatorname{Arg} z < \pi$).

Tma. Suponiendo que $1 + a_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ converge $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log}(1 + a_n)$ converge.

• Como es habitual, veremos algunas demostraciones (como la de este hecho básico), puesto que no toda la clase ha tenido un segundo curso de Variable Compleja.

Dem. $\square$ $(\Leftarrow)$: Supongamos que la serie converge y denotemos por S_n sus sumas parciales: $S_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Log}(1 + a_k)$, tomando la determinación principal del logaritmo.

Sean $P_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + a_k)$, $n \in \mathbb{N}$. Entonces $P_n = e^{S_n}$. Por hipótesis, $S_n \to S$, $n \to \infty$ $\Rightarrow$ $P_n \to e^{S} \neq 0, \infty$.

$(\Rightarrow)$: Supongamos ahora que $P_n \to P \neq 0, \infty$. Advertencia: no es cierto que $\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Log}(1 + a_k) \longrightarrow \operatorname{Log} P$, ya que, en general es falso que $\operatorname{Log} z + \operatorname{Log} w = \operatorname{Log}(zw)$.

[Razón: $\operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w \neq \operatorname{Arg}(zw)$, puesto que, si $-\pi < \operatorname{Arg} z < \pi$, $-\pi < \operatorname{Arg} w < \pi$, es posible que $\operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w \notin (-\pi, \pi)$.]

No obstante, veremos que $\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Log}(1+a_k)$ converge a algún valor de $\log P$ (no necesariamente el principal) cuando $n \to \infty$.

$$P_n \to P,\ n\to\infty \Rightarrow \operatorname{Log}\frac{P_n}{P} \to \operatorname{Log} 1 = 0,\ n \to \infty.$$

$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists h_n \in \mathbb{Z}$ t.q. $$\operatorname{Log}\frac{P_n}{P} = \operatorname{Log}\frac{\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)}{P}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Log}(1+a_k) + 2\pi i h_n - \operatorname{Log} P$$
$$= S_n - \operatorname{Log} P + 2\pi i h_n.$$

También:
$$\operatorname{Log}\frac{P_{n+1}}{P} = S_{n+1} - \operatorname{Log} P + 2\pi i h_{n+1}.$$

Restando, obtenemos
$$2\pi i (h_{n+1} - h_n) = \operatorname{Log}\frac{P_{n+1}}{P} - \operatorname{Log}\frac{P_n}{P} - \operatorname{Log}(1+a_{n+1}).$$

Recordando la definición $\operatorname{Log} z = \log|z| + i \operatorname{Arg} z$, obtenemos
$$2\pi (h_{n+1} - h_n) = \operatorname{Arg}\frac{P_{n+1}}{P} - \operatorname{Arg}\frac{P_n}{P} - \operatorname{Arg}(1+a_{n+1}).$$

Sabemos que $\frac{P_n}{P} \to 1 \Rightarrow \operatorname{Arg}\frac{P_{n+1}}{P}, \operatorname{Arg}\frac{P_n}{P} \to 0$ y $|\operatorname{Arg}(1+a_{n+1})| < \pi$.

Por tanto, para $n \geq n_0$, el lado derecho tiene valor absoluto $< \frac{3\pi}{2}$. El lado izquierdo es de la forma $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = 0$
$\Rightarrow h_{n+1} = h_n$ y así $\forall n \geq n_0$: $h_n = h \in \mathbb{Z}$.

Por tanto,
$$\operatorname{Log}\frac{P_n}{P} = S_n - \operatorname{Log} P + 2\pi i h, \quad \forall n \geq n_0$$
$\Rightarrow S_n \to \operatorname{Log} P - 2\pi i h$, $n \to \infty$ (un valor fijo). Por tanto, la serie de logaritmos converge. $\boxtimes$

Def'n. Se dice que el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ converge absolutamente si y sólo si la serie asociada, $\sum_{n=1}^{\infty}\log(1+a_n)$, converge absolutamente.

(Para simplificar la notación, con frecuencia escribiremos $\log z$ en lugar de $\mathrm{Log}\, z$ para la determinación principal del logaritmo.)

Observación. Se sigue de la definición de arriba y del Teorema anterior que: $\prod_n(1+a_n)$ converge absolutamente $\Rightarrow \prod_n(1+a_n)$ converge.

Prop. El producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ converge absolutamente $\Leftrightarrow$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ converge (es decir: $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}a_n$ converge absolutamente).

Dem. $\square$ Según la definición, $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ converge absolutamente $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}|\log(1+a_n)|$ converge. Esta serie converge o diverge simultaneamente con la serie $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$, debido a la formula (versión compleja) $\lim_{z\to 0}\frac{\log(1+z)}{z}=1$.

Esto se puede comprobar aplicando L'Hopital o usando el desarrollo en serie de Taylor:

$$\log(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\dots,$$

que converge uniformemente en cada disco $\overline{D}(0;r)$, $0<r<1$ (y, por tanto, podemos intercambiar la suma y el límite $\lim_{z\to 0}$).

Si converge $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$, entonces $a_n\to 0$, $n\to\infty$. Y si converge $\sum_{n=1}^{\infty}\log(1+a_n)$, entonces $\log(1+a_n)\to 0$, $n\to\infty \Rightarrow a_n\to 0$ también.

En cualquiera de los dos casos, $\exists N\in\mathbb{N}$ $\forall n\geq N$

$$\frac{1}{2}|a_n|\leq|\log(1+a_n)|\leq 2|a_n|,$$

así que $\sum_n|a_n|$ y $\sum_n|\log(1+a_n)|$ son equiconvergentes.

Ejemplos. Discutiremos brevemente dos productos:
$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+(-1)^n), \quad \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n^2}\right).$$

- Excluiremos el primero de nuestras consideraciones, puesto que tiene una cantidad infinita de términos nulos (para cada n impar).
- El segundo: sólo el primer término es nulo y lo excluimos. La serie converge absolutamente pues, por la Prop. anterior,
$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n^2}\right) \text{ converge absolutamente} \iff \text{converge } \sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$
lo cual es cierto.

Ejercicio. Estudiar la convergencia de $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$.

(Es evidente que no converge absolutamente, ya que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge. La pregunta es si converge.)

Corolario. Sea $0 \le u_n < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Entonces
$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-u_n) \text{ converge} \iff \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ converge.}$$

Observaciones. 1) $0 \le u_n < 1 \Rightarrow 0 < 1-u_n \le 1 \Rightarrow$ los productos parciales $P_n = \prod_{k=1}^{n}(1-u_k)$ forman una sucesión decreciente y positiva, luego $\exists \lim_{n\to\infty} P_n$ (finito y ≥ 0). Por tanto, nuestro producto converge si y sólo si dicho límite es >0. Por eso en algunos textos (como Rudin), en lugar de escribir "el producto converge", dicen $\prod_{n=1}^{\infty}(1-u_n) > 0$.

2) La demostración que daremos a continuación es algo distinta de las que se pueden ver en los libros citados de Duren y de Rudin.

Dem. □ Observamos que $\log(1-u_n) \le 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Por tanto,

$\sum_n |\log(1-u_n)| = -\sum_n \log(1-u_n)$ y la serie $\sum_n \log(1-u_n)$ converge si y sólo si converge absolutamente. Por consiguiente,

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-u_n) > 0 \iff \prod_{n=1}^{\infty}(1-u_n) \text{ converge absolutamente}$$
$$\iff \sum_{n=1}^{\infty} \log(1-u_n) \text{ converge absolutamente}$$
$$\iff \sum_{n=1}^{\infty} |-u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ converge.} \quad \boxtimes$$

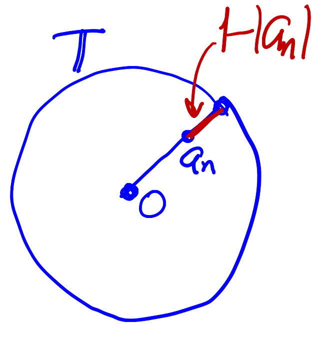
Ceros de las funciones en N

- El siguiente resultado, cuya prueba es simple (con todas las herramientas que tenemos a nuestra disposición), tendrá como consecuencia la caracterización de los ceros de las funciones en todos los espacios H^p.
- Recordemos que $f \in N$ (la clase de Nevanlinna) si y sólo si $f \in H(\mathbb{D})$ y $\sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} \log^+|f(re^{it})| \frac{dt}{2\pi} < \infty$.

 Ya sabemos que $H^\infty \subseteq \bigcap_{0<p<\infty} H^p \subseteq \bigcup_{0<p<\infty} H^p \subseteq N$.

Teorema. Sea $f \in N$, $f \not\equiv 0$ y sean (a_n) los ceros de f en $\mathbb{D}$, repetidos según sus multiplicidades. Entonces

(B) $\qquad \sum_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|) < \infty.$



Comentarios. 1) $1-|a_n| = \operatorname{dist}(a_n, \mathbb{T})$.

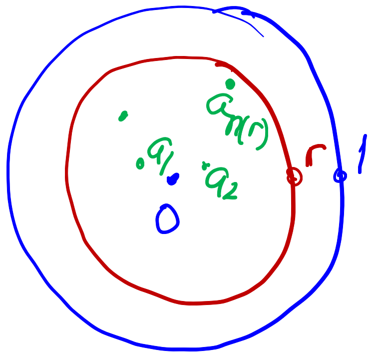
2) La condición (B) es conocida como la condición de Blaschke (1915).

3) Si f tiene sólo un número finito de ceros en $\mathbb{D}$, la suma en (B) debe considerarse finita y entonces no hay nada que probar. Por tanto, los casos de interés son aquellos donde f tiene una cantidad numerable (infinita) de ceros.

4) En breve veremos que para toda sucesión (a_n) que satisface (B) existe una función $B\in H^\infty$ cuyos únicos ceros son los (a_n), con las multiplicidades prescritas. Eso nos permitirá ver que las sucesiones de ceros son las mismas para todos los espacios H^p: las que satisfacen (B).

Dem. $\square$ Si f tiene un cero de orden m en $z=0$, entonces $f(z)=z^m g(z)$ y g tiene los mismos ceros que f salvo un número finito en el origen, lo cual no afecta a la convergencia de la suma en (B). (Ejercicio. Demostrar rigurosamente que $g\in N$ también.) Por tanto, sin pérdida de generalidad podamos suponer que $f(0)\neq 0$. Podemos enumerar los ceros de f de manera que $|a_1|\le|a_2|\le|a_3|\le\dots$.

Sea $n(r)=$ número de ceros de f en $\overline{D}(0;r)$. Para un $k\in\mathbb{N}$ fijo, elijamos $r\in(0,1)$ de manera que $n(r)>k$. Según la fórmula de Jensen,



$$|f(0)|\prod_{n=1}^{n(r)}\frac{r}{|a_n|}=e^{\int_0^{2\pi}\log|f(re^{it})|\frac{dt}{2\pi}}.$$

$n(r)>k$ y $\frac{r}{|a_n|}\ge 1$, $\forall n\le n(r)\Rightarrow$

$$|f(0)|\prod_{n=1}^{k}\frac{r}{|a_n|}\le|f(0)|\prod_{n=1}^{n(r)}\frac{r}{|a_n|}=e^{\int_0^{2\pi}\log|f(re^{it})|\frac{dt}{2\pi}}\le e^{\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{it})|\frac{dt}{2\pi}}\le C,$$

para cierta constante C, $0<C<\infty$ $(f\in N)$. Por tanto,

$$\prod_{n=1}^{k}|a_n|\ge\frac{1}{C}|f(0)|r^k \quad (\text{y así } \forall k\in\mathbb{N}).$$

Si r aumenta, la desigualdad se mantiene. Dejando que $r\to 1$, obtenemos

$$\prod_{n=1}^{k}|a_n|\ge\frac{|f(0)|}{C}>0,$$

es decir, $\prod_{n=1}^{\infty}|a_n|$ converge. Por el Corolario anterior,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|)<\infty$$

(poniendo $u_n=1-|a_n|\in(0,1)$). $\boxtimes$