(12) J, 18/3/2021

VALORES FRONTERA DE FUNCIONES EN H^∞

- El siguiente teorema de Fatou (1906) supuso la primera aplicación de la integral de Lebesgue fuera del ámbito de la Teoría de la medida y de la integración.

Teorema (Fatou). A cada $f \in H^\infty$ le corresponde una función $f^* \in L^\infty(\mathbb{T})$, definida en casi todo punto $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$ (resp. a la medida $dm(\theta) = \frac{d\theta}{2\pi}$) como

$$f^*(e^{i\theta}) = \lim_{r \to 1^-} f(re^{i\theta}).$$

[se usa también $\tilde{f}$ en lugar de f^*]

Además, se cumple la igualdad

$$\|f\|_\infty = \|f^*\|_\infty.$$

Es decir,

$$\sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)| = \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} \text{ess}\, |f^*(e^{i\theta})|.$$

- Para ir avanzando con los contenidos del curso y con las colecciones de problemas, vamos a posponer la prueba de este resultado hasta las últimas semanas del curso.
- La demostración se basa en las propiedades de las integrales de Poisson y el resultado es cierto para clases más amplias que H^∞. Hay varias formas de abordar la demostración, p.ej.,

1) Rudin: "Real and Complex Analysis". Se consideran medidas complejas, su variación total y las integrales del núcleo de Poisson respecto a las medidas complejas. [Capítulos 6, 11.]

2) Duren: "Theory of H^p Spaces". Usando las propiedades de las funciones de variación acotada y de la integral de Riemann–Stieltjes, se consideran las integrales de Poisson–Stieltjes (esto es, las integrales del núcleo de Poisson respecto a una función de variación acotada. [W. Rudin: Principles of

Mathematical Analysis, cap. 6 o T. M. Apostol, Mathematical Analysis, cc. 6 y 7) — referencias para las funciones $BV[a,b]$ y la integral R-S.]

- En lo que sigue, daremos por hecho el Tma. de Fatou y lo aplicaremos para seguir desarrollando la teoría de los espacios H^p en el disco.

Una de las claves para el Tma. de Fatou es el siguiente resultado, que también vamos a asumir por ahora. Recordemos primero (Clase 10) que la integral de Poisson, $F=P[f]$, de una función $f\in L^1(\mathbb{T})$, es la función definida en $\mathbb{D}$ como

$$F(z)=F(re^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P_r(t-\theta)f(t)\,dt.$$

<u>Tma.</u> Si $f\in L^1(\mathbb{T})$ y $F=P[f]$, entonces, en c.t.p. $e^{i\theta}\in\mathbb{T}$,

$$\lim_{r\to 1^-}F(re^{i\theta})=f(e^{i\theta}).$$

- Suponiendo esto, podemos demostrar el siguiente resultado.

<u>Tma.</u> a) Sea $f\in H^\infty$ y $f^*\in L^\infty(\mathbb{T})$ sus valores frontera (que existen en c.t.p. $e^{i\theta}\in\mathbb{T}$). Entonces tenemos la siguiente versión generalizada de la fórmula integral de Cauchy:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}\frac{f^*(w)}{w-z}\,dw,\quad \forall z\in\mathbb{D},$$

donde la circunferencia unidad $\mathbb{T}$ está orientada positivamente.

b) Los límites radiales f^* de las funciones $f\in H^\infty$ satisfacen

$$\int_0^{2\pi}f^*(e^{it})e^{-int}\,dt=0,\quad n\in\{-1,-2,\dots\}.$$

Dicho de otra manera, para $n<0$, los coeficientes de Fourier de f^* son:

$$\widehat{f^*}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f^*(e^{it})e^{-int}\,dt=0.$$

Recíprocamente, toda función $g\in L^\infty(\mathbb{T})$ t.q. $\hat{g}(n)=0$, $\forall n\in\{-1,-2,-3,\dots\}$, es la función frontera de una $f\in H^\infty$.

$\exists f \in H^\infty$ t.q. $g = f^*$ en c.t.p. de $\mathbb{T}$.

Observaciones. (1) En la fórmula integral de Cauchy, normalmente integramos $\frac{f(w)}{w-z}$ a lo largo de una curva contenida en un dominio simplemente conexo, en el que f es holomorfa. Existe una versión en la que f se integra a lo largo de una circunferencia en la que es continua y en su interior es holomorfa. Aquí, en el apartado a), f^* ni siquiera existe en todos los puntos de $\mathbb{T}$ $(f^* \in L^\infty(\mathbb{T}))$.

(2) El apartado b) nos dice que H^∞ se puede identificar con las funciones $g \in L^\infty(\mathbb{T})$ que tienen la propiedad

$$\hat{g}(n) = 0, \quad \forall n \in \{-1, -2, \dots\},$$

siendo $g = f^*$ para cada $f \in H^\infty$ correspondiente a g. De hecho, $g = P[f]$. Lo mismo sucede con otros espacios H^p y $L^p(\mathbb{T})$, como se verá más adelante.

Dem. $\square$ a) Sea $z \in \mathbb{D}$ arbitrario. Para r arbitrario con $|z| < r < 1$, sea $r\mathbb{T} = \{w : |w| = r\} = \{re^{it} : 0 \le t \le 2\pi\}$, orientada en el sentido positivo. Por la fórmula integral de Cauchy (versión habitual),

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{r\mathbb{T}} \frac{f(w)}{w-z}\, dw = \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it})\, e^{it} dt}{re^{it} - z}.$$

$(dw = ire^{it}dt)$

Sea $(r_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión t.q. $|z| < r_1 < r_2 < \dots < 1$, $\lim_{n\to\infty} r_n = 1$.

Debido a la estimación

$$\left| \frac{f(r_n e^{it})\, e^{it}}{r_n e^{it} - z} \right| \le \frac{|f(r_n e^{it})|}{r_n - |z|} \le \frac{\|f\|_{H^\infty}}{r_1 - |z|} = \text{cte},$$

podemos aplicar el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue para deducir que

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(r_n e^{it}) e^{it} dt}{r_n e^{it} - z}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f^*(e^{it}) e^{it} dt}{e^{it} - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{f^*(w)\,dw}{w-z}.$$

b) • Por el Teorema integral de Cauchy,

$$\int_{r\mathbb{T}} f(w) w^n dw = 0, \quad \forall n \in \{0,1,2,\dots\}.$$

$w = re^{it}$
$dw = ire^{it}dt$

Es decir, $0 = i\int_0^{2\pi} f(re^{it}) r^{n+1} e^{i(n+1)t} dt$

$$\Rightarrow 0 = \int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{i(n+1)t} dt, \quad \forall n \in \{0,1,2,\dots\}$$

$$\Rightarrow 0 = \int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-int} dt, \quad \forall n \in \{-1,-2,\dots\}.$$

De nuevo, $|f(re^{it})e^{-int}| = |f(re^{it})| \leq \|f\|_\infty, \quad \forall r \in (0,1)$

Aplicando el Tma. de la convergencia dominada, vemos que

$$0 = \lim_{r\to 1^-} \int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-int} dt = \int_0^{2\pi} f^*(e^{it}) e^{-int} dt, \quad (*)$$

$\forall n \in \{-1,-2,\dots\}$.

• Observemos ahora que, para $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$,

$$f(z) \overset{(a)}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{f^*(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f^*(e^{it}) e^{it} dt}{e^{it} - z}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f^*(e^{it}) dt}{1 - ze^{-it}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^*(e^{it}) \sum_{n=0}^{\infty} z^n e^{-int} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^*(e^{it}) \sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in\theta} e^{-int} dt$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^*(e^{it}) \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(\theta - t)}}\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^*(e^{it})\, \underbrace{P_r(\theta-t)}\, dt \quad \text{(Apuntes, clase 10).}$$

La fórmula obtenida, $\boxed{f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^*(e^{it}) P_r(\theta - t)\, dt}$ (P)

nos dice dos cosas:

1), La fórmula generalizada de Cauchy del apdo. a), en este caso se convierte en la integral de Poisson: $f = P[f^*]$.

2) $$|f(z)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f^*(e^{it})|\, P_r(\theta-t)\, dt$$
$$\leq \|f^*\|_\infty \cdot \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta-t)\, dt = \|f^*\|_\infty$$

$\Rightarrow \quad \|f\|_{H^\infty} \leq \|f^*\|_{L^\infty(\mathbb{T})}$, lo cual prueba "la mitad" de la igualdad $\|f\|_\infty = \|f^*\|_\infty$ en el Tma. de Fatou enunciado antes.

- Finalmente, sea $g \in L^\infty(\mathbb{T})$ tal que $\int_0^{2\pi} g(e^{it}) e^{-int} dt = 0$, $n = -1, -2, \ldots$ Definamos
$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{g(e^{it})}{1 - ze^{-it}}\, dt, \quad z \in \mathbb{D}.$$

(Obsérvese que $|1 - ze^{-it}| \geq 1 - |z| > 0$, $\forall z \in \mathbb{D} \Rightarrow \frac{g(e^{it})}{1-ze^{-it}} \in L^1(\mathbb{T})$.

Es evidente que $f \in H(\mathbb{D})$ porque
$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(e^{it}) \sum_{n=0}^\infty z^n e^{-int} dt$$
$$= \sum_{n=0}^\infty \Big[\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(e^{it}) e^{-int} dt}_{=\hat{g}(n)}\Big] z^n, \quad (S)$$

En efecto, $\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(e^{it}) e^{-int} dt\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(e^{it})|\, dt \leq \|g\|_\infty$, así que la serie en (S) se puede dominar por la geométrica $\sum_{n=0}^\infty |z|^n$ que converge uniformemente en cada $K \Subset \mathbb{D}$, lo cual también justifica el intercambio de la $\int_0^{2\pi}$ y $\sum_{n=0}^{\infty}$ en el paso anterior.

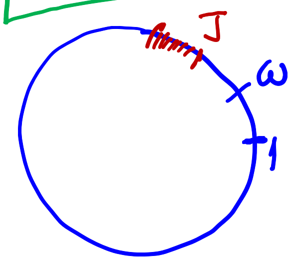
Por la misma fórmula (P) en el recuadro rojo de antes, aplicada a g en lugar de f^*, $f=P[g]$ y $\|f\|_\infty \le \|g\|_\infty$.

Por el Teorema (no probado) citado antes,

$$g(e^{i\theta}) = \lim_{r\to 1^-} f(re^{i\theta}) = f^*(e^{i\theta}) \quad \text{en c.t.p. } e^{i\theta}\in\mathbb{T}. \quad ⊠$$

• Tenemos el siguiente teorema de unicidad, que mejoraremos más tarde (por otro método).

Tma. Sea $f\in H^\infty$ y J un arco (de medida >0) de la circunferencia $\mathbb{T}$ tal que $f^*(e^{it})=0$ en c.t.p. de J. Entonces $f\equiv 0$ en $\mathbb{D}$.



Dem. □ Sea $|J|$ la longitud del arco J (no normalizada) y $n\in\mathbb{N}$ t.q. $\frac{2\pi}{n}<|J|$.

Sea $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ la raíz primitiva n-ésima de 1.

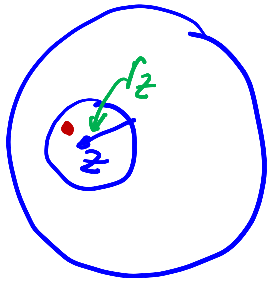
Definimos
$$g(z)=\prod_{k=1}^{n} f(\omega^k z), \quad z\in\mathbb{D}.$$

Entonces $g\in H^\infty$ y
$$g^*(e^{i\theta}) = \prod_{k=1}^{n} f^*(\omega^k e^{i\theta}) = 0 \quad \text{en c.t.p. } e^{i\theta}\in\mathbb{T}$$
porque uno de los puntos rotados $\omega^k e^{i\theta}$, $k\in\{1,2,\dots,n\}$ tiene que pertenecer a J.

Por el Tma. anterior, $g(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{g^*(w)}{w-z}\,dw = 0$, $\forall z\in\mathbb{D}$.

Si no fuera $f\equiv 0$ en $\mathbb{D}$, su conjunto de ceros sería, como mucho numerable. (Demostración: Por el Teorema de la unicidad, los ceros no se pueden acumular en $\mathbb{D}$, luego son aislados: para cada cero z de f, $\exists r_z>0$ t.q. en el disco

$D(z,r_z)$ no hay otros ceros de f. Pero cada disco contiene un punto con ambas coordenadas racionales, q_z. Esto establece una función inyectiva $z \mapsto q_z$ entre los ceros de f y $(\mathbb{Q}+i\mathbb{Q})\cap\mathbb{D}$, que es numerable.)



El conjunto de ceros de g es unión de n conjuntos tales que cada uno de ellos es el conjunto rotado de los ceros de f y, por tanto, como mucho numerable. Se sigue que g tiene, como mucho, una cantidad numerable de ceros en $\mathbb{D}$, #.

Por tanto, $f \equiv 0$. ☒

CEROS DE LAS FUNCIONES H^p

• La herramienta básica para estudiar los ceros de las funciones analíticas (en un disco, enteras, etc.) es la llamada fórmula de Jensen. También necesitaremos los productos infinitos.

Fórmula de Jensen

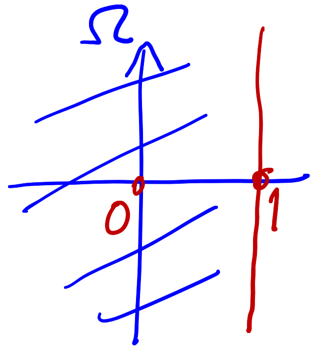
Empezaremos probando el siguiente lema. [Véase el libro del (Medalla Fields) Lars V. Ahlfors; "Complex Analysis" para una demostración basada en el cálculo de residuos para probar que

$$\int_0^{\pi} \log(\operatorname{sen} t)\,dt = -\pi \log 2.$$

Aquí daremos una prueba diferente.]

Lema. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \log|1-e^{it}|\,dt = 0.$

(Obsérvese que la integral es impropia, con una singularidad en 0 y en 2π.)

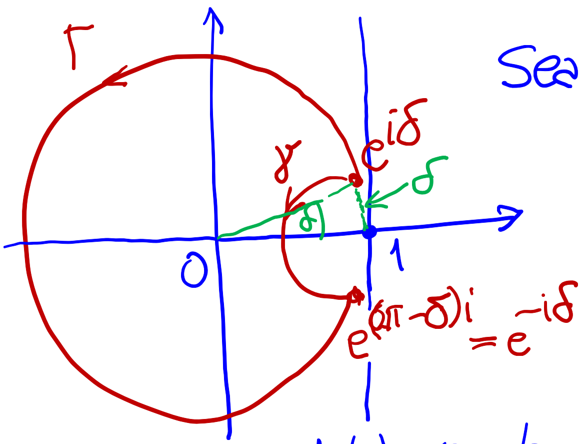


Dem. □ Sea $\Omega = \{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 1\}$. Puesto que Ω es simplemente conexo y $1-z \neq 0$

en Ω, el Tma. fundamental acerca de los dominios simplemente conexos (repasado en la clase 10) nos dice que $\exists h \in \mathcal{H}(\Omega)$ tq. $e^{h(z)} = 1-z$ (es decir, $h(z) = \log(1-z)$, $z \in \Omega$). Podemos elegir una determinación única h exigiendo que $h(0)=0$ ($\log 1 = 0$).

En Ω, $\operatorname{Re}(1-z) > 0$ y $h(z) = \log(1-z) = \log|1-z| + i\operatorname{Arg}(1-z)$

$\Rightarrow \operatorname{Re} h(z) = \log|1-z|$, $|\operatorname{Im} h(z)| < \frac{\pi}{2}$ $\quad$ ($\operatorname{Re} w > 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Arg} w < \frac{\pi}{2}$)

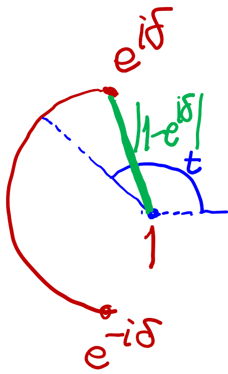


Sea $\Gamma(t) = e^{it}$, $\delta \le t \le 2\pi - \delta$ (para un δ pequeño) y sea γ el arco circular de centro 1 y radio $|1-e^{i\delta}|$ desde $e^{i\delta}$ hasta $e^{-i\delta}$. (Obsérvese que $|1-e^{i\delta}| \simeq \delta$, $\delta \to 0^+$.) Entonces $\{\Gamma\} \cup \{\gamma\} \subseteq \Omega$. Puesto que $h(0)=0$, la función $\frac{h(z)}{z}$ tiene una singularidad evitable en el origen, así que es holomorfa en Ω. Por el Teorema integral de Cauchy,

$$\int_{\Gamma \cup \gamma^-} \frac{h(z)}{z}\,dz = 0,$$

así que

$$\int_\gamma \frac{h(z)}{z}\,dz = \int_\Gamma \frac{h(z)}{z}\,dz = \int_\delta^{2\pi-\delta} \frac{h(e^{it})\, i\cancel{e^{it}}\,dt}{\cancel{e^{it}}}$$



$$\Rightarrow \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{h(z)}{z}\,dz\right\} = \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_\delta^{2\pi-\delta} h(e^{it})\,dt\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_\delta^{2\pi-\delta} \log|1-e^{it}|\,dt.$$

Cuando $\delta \to 0^+$, el lado derecho $\longrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|1-e^{it}|\,dt$, mientras que el lado izquierdo se puede estimar como sigue:

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{h(z)}{z}\,dz\right\} \le \frac{1}{2\pi}\left|\int_\gamma \frac{h(z)}{z}\,dz\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{|h(z)|}{|z|}\,|dz|.$$

Parametrizando γ como $z = \gamma(t) = 1 + |1-e^{i\delta}|\,e^{it}$, $\frac{\pi}{2} < t_1 \le t \le t_2 < \frac{3\pi}{2}$, obtenemos: $dz = |1-e^{i\delta}| i e^{it} dt$; $|dz| = |1-e^{i\delta}| dt$; $|1-z| = |1-e^{i\delta}| \approx \delta$ pues $\lim_{\delta \to 0^+} \frac{|1-e^{i\delta}|}{\delta} = 1$; $|\arg(1-z)| < t_2 - t_1 < \pi \Rightarrow |h(z)| = \sqrt{\log^2|1-e^{i\delta}| + |\arg(1-z)|^2}$

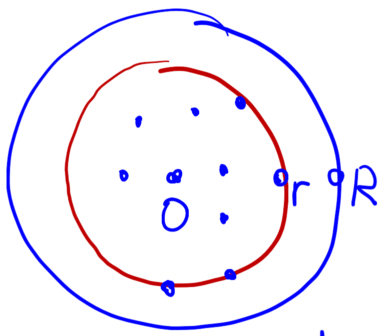
$\leq M \cdot \log \frac{1}{\delta}$, $\delta \to 0^+$. Por tanto,

$$\frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{|h(z)|}{|z|} |dz| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{t_1}^{t_2} \frac{|h(z)|}{1-|1-e^{i\delta}|} |1-e^{i\delta}| dt \leq \frac{c\delta \log\frac{1}{\delta}}{1-\delta} \to 0, \delta \to 0^+.$$

cuando $\delta \to 0^+$.

Esto implica que $\int_0^{2\pi} \log|1-e^{it}| dt = 0$. $\boxtimes$

- Si $\Omega = D(0;R)$, $f \in H(\Omega)$, $f \not\equiv 0$ y $0<r<R$, por el Teorema de la unicidad, f solo puede tener una cantidad finita de ceros en $\overline{D}(0;r)$.



- El siguiente resultado suele enunciarse imponiendo la hipótesis $f(0) \neq 0$ para simplificar la fórmula. No obstante, puede reescribirse si $f(0)=0$: si f tiene un cero de orden k en $z=0$, basta aplicar la fórmula a la función holomorfa $\frac{f(z)}{z^k}$ (que ya no se anula en el origen).

Teorema (Fórmula de Jensen). Sea $f \in H(D(0;R))$, $f(0) \neq 0$, $0<r<R$ y sean $a_1, a_2, \ldots, a_N$ los ceros de f en $\overline{D}(0;r)$, donde cada uno se repite en el listado el número de veces correspondiente a su multiplicidad. Entonces

$$|f(0)| \prod_{n=1}^{N} \frac{r}{|a_n|} = e^{\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi}}.$$

Escrito de otra manera,

$$\log|f(0)| = \int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi} - \sum_{n=1}^{N} \log\frac{r}{|a_n|}.$$

- Obsérvese que, cuando no hay ceros en $\overline{D}(0;r)$, p.ej., cuando $r \approx 0$, esto es simplemente la propiedad del valor medio para $\log|f|$...

función armónica $\log|f| = \mathrm{Re}\{\log f\}$, puesto que se puede definir $\log f \in H(D(0;\rho))$ para cierto ρ con $r<\rho<R$.

Dem. $\square$ Podemos ordenar los ceros de menor a mayor módulo, de manera que $a_1,\dots,a_m \in D(0;r)$ y $|a_{m+1}| = \dots = |a_N| = r$, siendo posibles los casos $m=N$, $m=0$. Sea

$$g(z) = f(z) \prod_{n=1}^{m} \frac{r^2-\bar{a}_n z}{r(a_n-z)} \prod_{n=m+1}^{N} \frac{a_n}{a_n-z}. \qquad (G)$$

Vemos que $\exists \varepsilon>0$ t.q. $g\in H(D(0;r+\varepsilon))$ y g no tiene ceros en $D(0;r+\varepsilon)$, debido a la cancelación de los factores $z-a_n$ de f con los factores del denominador. Por tanto, podemos definir $\log g \in H(D(0;r+\varepsilon)) \Rightarrow \log|g| = \mathrm{Re}\{\log g\} \in h(D(0;r+\varepsilon)) \Rightarrow$

$$\log|g(0)| = \int_0^{2\pi} \log|g(re^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi} \qquad (PVM)$$

$$(G) \Rightarrow \quad |g(0)| = |f(0)| \prod_{n=1}^{m} \frac{r}{|a_n|}.$$

- $\forall n\in\{1,2,\dots,m\}$, $|z|=r \Rightarrow \left|\frac{r^2-\bar{a}_n z}{r(a_n-z)}\right| = 1$. En efecto, si $|z|=r$, entonces $z=r\lambda$, $|\lambda|=1$ y, por las propiedades de los automorfismos:

$$\left|\frac{\lambda-\frac{a_n}{r}}{1-\frac{\bar{a}_n}{r}\lambda}\right| = 1 \quad \left(\left|\frac{a_n}{r}\right|<1\right) \Rightarrow 1 = \left|\frac{\lambda r - a_n}{r-\bar{a}_n\lambda}\right| = \left|\frac{r(z-a_n)}{r^2-\bar{a}_n z}\right|.$$

- si $m+1\le n\le N$, $a_n = re^{i\theta_n}$, entonces (tomando logaritmos), $(G) \Rightarrow$

$$\log|g(re^{i\theta})| = \log|f(re^{i\theta})| - \sum_{n=m+1}^{N} \log|1-e^{i(\theta-\theta_n)}|.$$

$$\left|\frac{a_n}{a_n-z}\right| = \frac{1}{\left|1-\frac{z}{a_n}\right|} = \frac{1}{|1-e^{i(\theta-\theta_n)}|}$$

- $$\int_0^{2\pi} \log|1-e^{i(\theta-\theta_n)}|\,d\theta \underset{\theta-\theta_n=t}{=} \int_0^{2\pi} \log|1-e^{it}|\,dt \underset{\text{Lema}}{=} 0$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \log|g(re^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi} = \int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi} \Rightarrow$$

$$\log|g(0)| = \log|f(0)| + \sum_{n=1}^{m} \log\left(\frac{r}{|a_n|}\right) = \int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi}.$$

$\left(m+1\le n\le N \Rightarrow \frac{r}{|a_n|} = 1 \Rightarrow \text{podemos poner } \sum_{n=1}^{N} \log\frac{r}{|a_n|}.\right)$ $\boxtimes$